N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
AO 12317

PARIJS

# THESE

*PRESENTEE*

*DEVANT L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE*

*POUR OBTENIR*

*LE TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR*

*SPECIALITE : MATHEMATIQUES*

*PAR*

**Marc LENOIR**

*Sujet de la thèse*

## SIMULATION NUMERIQUE DU « COLLAPSE »

## D'UNE BULLE DE CAVITATION

*Soutenue le 27 janvier 1976 devant la Commission d'Examen*

| | | |
|---|---|---|
| *Messieurs* | *P. GERMAIN* | *Président* |
| | *J.J. BERNARD* | *Examinateurs* |
| | *D. EUVRARD* | |
| | *R. PEYRET* | |
| | *J.C. NEDELEC* | |

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A0 12317

# THESE

*PRESENTEE*

*DEVANT L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE*

*POUR OBTENIR*

*LE TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR*

*SPECIALITE : MATHEMATIQUES*

*PAR*

**Marc LENOIR**

*Sujet de la thèse*

## SIMULATION NUMERIQUE DU « COLLAPSE »

## D'UNE BULLE DE CAVITATION

*Soutenue le 27 janvier 1976 devant la Commission d'Examen*

| | | |
|---|---|---|
| *Messieurs* | *P. GERMAIN* | *Président* |
| | *J.J. BERNARD* | *Examinateurs* |
| | *D. EUVRARD* | |
| | *R. PEYRET* | |
| | *J.C. NEDELEC* | |

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je remercie, tout d'abord, Monsieur Daniel EUVRARD, professeur à l'ENSTA, qui a dirigé ce travail avec une inépuisable sollicitude et à qui la présente rédaction est redevable de maintes remarques.

Je remercie le professeur Paul GERMAIN, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, d'avoir bien voulu présider le jury de thèse.

Je remercie le professeur Jean-Joseph BERNARD, directeur de l'UER de Mécanique à l'Université Pierre et Marie Curie ainsi que Monsieur PEYRET, maître de recherches au CNRS, d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Je remercie Monsieur NEDELEC, directeur du Laboratoire de Mathématiques Appliquées à l'Ecole Polytechnique, pour ses précieux conseils dans le domaine de l'analyse numérique et fonctionnelle.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à l'égard de Madame LAMPSON, documentaliste à l'ENSTA, pour l'aide qu'elle m'a apporté tant au cours du déroulement de ce travail que lors de son édition.

Je remercie Madame MOULIN qui a mené à bien avec goût l'ingrat travail de dactylographie de ce document.

Enfin j'adresse mes remerciements à Monsieur SCHUMANN et à Madame FRECON, opérateurs au Centre de Calcul de l'ENSTA, qui ont présidé à l'accouchement, parfois douloureux de mes listings.

TABLE DES MATIERES


Pages

1 - LE PROBLEME TRAITE ..... 1

Aspects expérimentaux ..... 3
Modélisation ..... 6

2 - L'EQUATION DE BERNOULLI ..... 15

Découpage en problèmes stationnaires ..... 17
Phénomènes physiques supplémentaires ..... 23

3 - L'EQUATION DE LAPLACE ..... 25

Le problème stationnaire ..... 27
La méthode des singularités ..... 29
Mise sous forme variationnelle ..... 43

4 - PROBLEMES TECHNIQUES ET INFORMATIQUES ..... 55

Structure du programme ..... 57
Discrétisation automatique ..... 72

5 - RESULTATS ..... 85

Adimensionnalisation ..... 87
Influence de la paroi ..... 88
Présence d'un gaz sec ..... 91
Améliorations et extensions ..... 92

6 - FIGURES ..... 95

7 - ANNEXES ..... 97

Potentiel créé par un polygône plan ..... 99
Vitesse induite par un polygône plan ..... 109
Intégration numérique dans un trapèze ..... 120

BIBLIOGRAPHIE ..... 123

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548117_0024

# CHAPITRE 1

# LE PROBLEME TRAITE

## 1.1 - ASPECTS EXPERIMENTAUX

Description du phénomène

Etudes antérieures

## 1.2 - MODELISATION

Modèle de RAYLEIGH

Introduction à l'étude numérique

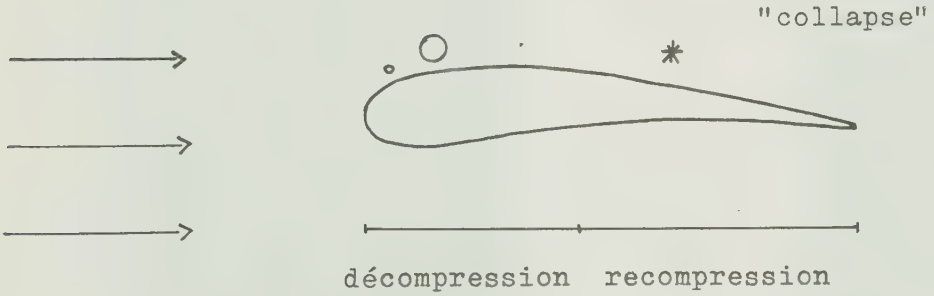
## 1.1 - ASPECTS EXPERIMENTAUX

"Cavitation is a most unpleasant hydrodynamic phenomenon, whose harmful effects are both widespread and obvious and seriously handicap many phases of science and engineering. Conversely, its basic nature has long been veiled in mystery and only recently is it beginning to be understood".

R.T. KNAPP

### 1.1.1 - Description du phénomène

Le phénomène de cavitation est connu depuis fort longtemps; les hydrodynamiciens baptisent ainsi l'apparition de bulles au sein d'un liquide, produites lors d'une diminution de pression, la température restant constante. On peut produire la cavitation en soumettant un liquide à un champ ultra-sonore suffisamment intense ou encore en créant un écoulement suffisamment rapide autour d'un obstacle.




Si la vitesse augmente on peut assister à la coalescence des différentes bulles qui forment alors une poche de vapeur se prolongeant derrière le profil. Un tel phénomène altère profondément les caractéristiques hydrodynamiques du profil et peut causer des pertes de rendement considérables quand il se produit au voisinage des pales d'une turbomachine ou d'une hélice.

Le phénomène inverse se produit également; les bulles de vapeur engendrées par la cavitation peuvent disparaître lors d'une augmentation de pression : c'est le "collapse". Ce "collapse" est considéré comme responsable de l'érosion de cavitation, susceptible de détruire les profils et pales qui y sont soumis; il est également responsable du bruit de cavitation, phénomène qui affecte les performances des sonars sous-marins.

Tout ceci justifie la citation reproduite en exergue, ainsi que le sujet de la présente étude qui consiste à simuler numériquement le "collapse" d'une bulle de cavitation.

### 1.1.2 - Quelques études antérieures consacrées au "collapse"

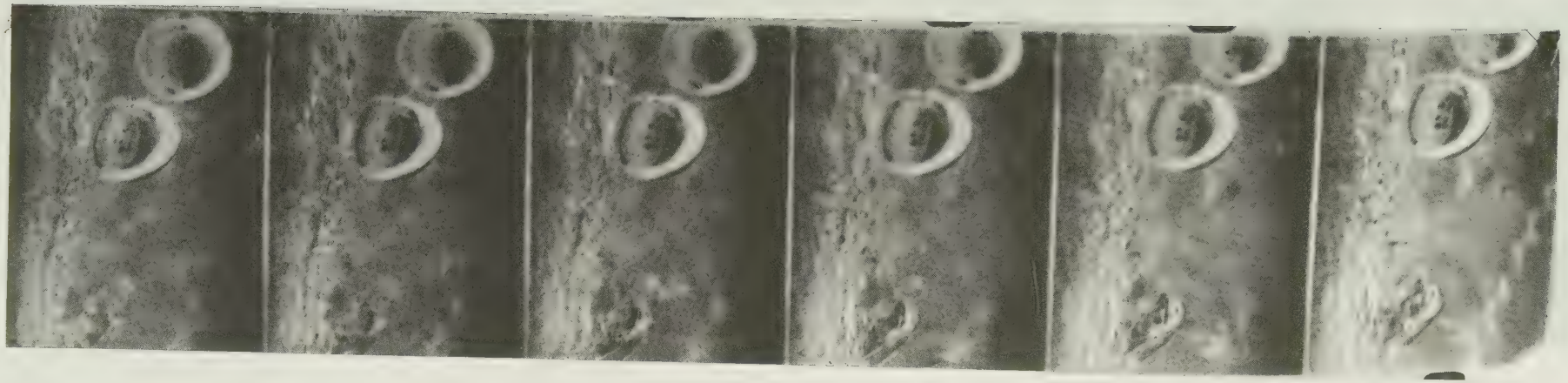
RAYLEIGH [12] (1917) a étudié par voie analytique le "collapse" d'une bulle sphérique en milieu infini. Cette étude est reprise en 1.2.1 . Les hypothèses de base sont analogues aux nôtres, hormis celle de sphéricité.

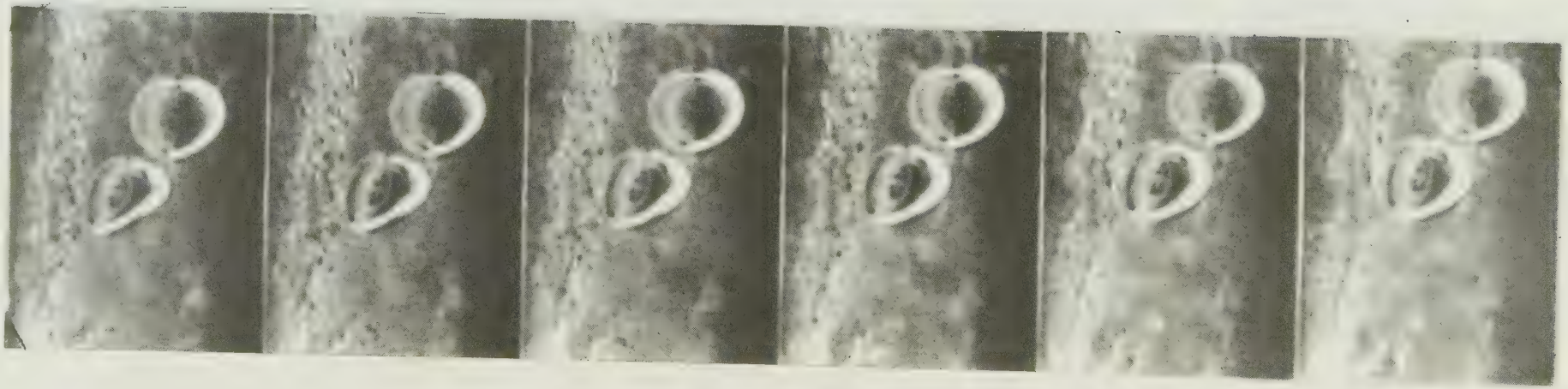
KNAPP et HOLLANDER [5] (1948) utilisant la cinématographie ultrarapide ont mis en évidence le caractère asymétrique du "collapse" au voisinage d'une paroi et l'existence de vitesses importantes.

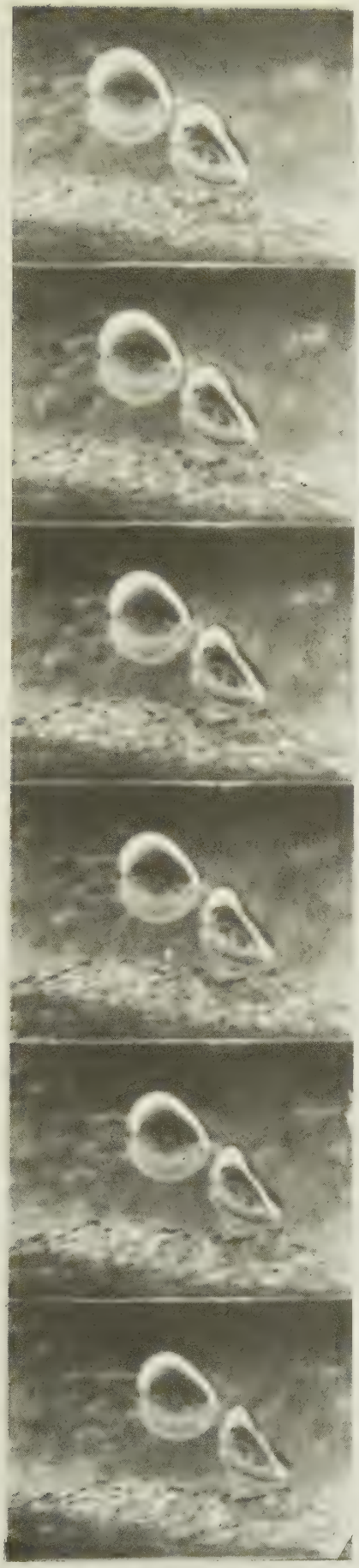
NAUDE et ELLIS [9] (1961) ont pu filmer en détail le développement d'un jet rentrant dirigé vers la paroi. Le temps de "collapse" est de l'ordre de $10^{-4}$ secondes.

PLESSET et CHAPMAN [11] (1969) ont étudié, d'un point de vue numérique, le "collapse" d'une bulle au voisinage d'une paroi. Le fluide est parfait, incompressible, l'écoulement irrotationnel, la pression constante dans la bulle. A l'instant initial, le fluide est au repos. C'est une méthode de différences finies qui a été utilisée pour le calcul; l'apparition et le développement d'un jet rentrant ont été mis en évidence.

MITCHELL et HAMMIT [8] (1970) ont mené une étude numérique semblable dans le cas d'un fluide visqueux, à l'aide d'une méthode de "Markers And Cells". Le cas du collapse dans un champ de pression à gradient







constant a également été envisagé. La naissance du jet rentrant a été constatée mais les calculs n'ont pu être poussés plus loin.

CHAHINE [2] (1974) a fait une étude asymptotique du "collapse" sphérique, visant à préciser l'importance des divers paramètres physiques qui influent sur le phénomène. Il montre que la tension superficielle est généralement négligeable et met l'accent sur l'importance d'un éventuel gaz sec inclus dans la bulle. Il a également réalisé une étude expérimentale d'où sont extraites les photos précédentes; elles représentent le collapse d'une bulle au voisinage d'une poche de cavitation, cas un peu différent du nôtre, mais choisi pour sa qualité démonstrative.

Dans l'exemple considéré, le temps total de "collapse" est de l'ordre de $2.10^{-3}$ secondes; la direction oblique du jet provient de la présence d'un écoulement extérieur.

## 1.2 - MODELISATION

### 1.2.1 - Modèle de RAYLEIGH

On reprend ici les calculs effectués par RAYLEIGH [12] dans l'une des toutes premières études sur le "collapse". On comparera dans la suite les résultats numériques à ces formules analytiques simples.

a) Hypothèses

On se place au sein d'un fluide parfait, incompressible indéfini, initialement au repos; l'écoulement admet un potentiel des vitesses; on néglige les forces de volume. A l'instant initial une portion sphérique de liquide est soudainement annihilée.

b) Notations

$t$ : temps

$r$ : distance au centre de la bulle

$R(t)$ : rayon de la bulle

$p(r,t)$ : pression

$\phi(r,t)$ : potentiel

$v(r,t)$ : vitesse radiale

$$V(t) = \frac{dR}{dt}(t) = v(R(t),t)$$

$$R_0 = R(0)$$

$\rho$ : masse volumique du liquide

c) Conditions aux limites

$$\phi(r,t) = O(1/r) \qquad \text{quand} \quad r \to \infty$$

$$p(r,t) \to p_\infty \qquad \text{quand} \quad r \to \infty$$

$$p(R(t),t) = 0$$

d) Calcul du potentiel

L'écriture du laplacien en coordonnées sphériques fournit

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)=0$$

Soit

$$\phi(r,t)=\frac{k(t)}{r} \quad . \text{ On en déduit } \quad v(r,t)=\frac{-k(t)}{r^2}$$

Donc

$$\phi(r,t)=\frac{-V(t)\,R^2(t)}{r}$$

et finalement

$$v=\frac{V R^2}{r^2}$$

e) Calcul de la vitesse

Le travail des forces de pression exercées sur le liquide à l'infini entre l'instant initial et l'instant $t$ est fourni par :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(t) &= \lim_{r_0\to\infty}\int_0^t -4\pi r_0^2\, v(r_0,\tau)\,p(r_0,\tau)\,d\tau \\ &= \lim_{r_0\to\infty}\int_0^t -4\pi R^2(\tau)\,V(\tau)\,p(r_0,\tau)\,d\tau \\ &= -4\pi p_\infty \int_{R_0}^{R(t)} \ell^2\, d\ell\end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{C}(t)=\frac{4}{3}\pi p_\infty\left(R_0^3-R^3\right)$$

L'énergie cinétique du liquide à l'instant $t$ est exprimée par

$$\mathcal{E}_c(t)=\int_{R(t)}^{\infty}\frac{\rho}{2}\,v^2\,4\pi r^2\,dr=2\pi\rho V^2R^4\int_R^\infty\frac{dr}{r^2}$$

Soit

$$\mathcal{E}_c(t)=2\pi\rho V^2R^3$$

On peut également calculer le travail de compression adiabatique $\mathcal{C}_a(t)$ exercé sur le liquide par un éventuel gaz sec inclus dans la bulle.

$p_0$ : pression initiale de gaz sec

$v_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$ : volume initial

$\gamma = c_p / c_v > 1$

La compression obéit à la loi $p v^\gamma$ = constante

$$\mathcal{C}_a(t) = \int_{R_0}^{R} 4\pi \ell^2 p_0 \left(\frac{R_0}{\ell}\right)^{3\gamma} d\ell ,$$

soit

$$\mathcal{C}_a(t) = \frac{4\pi}{3(\gamma-1)} R_0^{3\gamma} p_0 \left(R_0^{3(1-\gamma)} - R^{3(1-\gamma)}\right)$$

Dans l'hypothèse où la bulle est vide, $\mathcal{E}_c(t) = \mathcal{C}(t)$, soit

$$\rho V^2 R^3 = \frac{2}{3} p_\infty (R_0^3 - R^3) ,$$

ou encore

$$(1) \qquad V^2 = \frac{2 p_\infty}{3\rho}(h-1) \qquad \text{, avec} \qquad h = \frac{R_0^3}{R^3} .$$

Si $p_\infty > 0$ la bulle se contracte et donc $h > 1$.

Dans le cas de la compression adiabatique,

$$\mathcal{E}_c(t) = \mathcal{C}_a(t) + \mathcal{C}(t)$$

Soit

$$\rho V^2 R^3 = \frac{2}{3} p_\infty (R_0^3 - R^3) + \frac{2}{3(\gamma-1)} R_0^{3\gamma} p_0 \left(R_0^{3(1-\gamma)} - R^{3(1-\gamma)}\right)$$

On en déduit

$$(2)\quad V^2 = \frac{2}{3\rho}\left[p_\infty(h-1) + \frac{p_0}{\gamma-1}h\left(1-h^{\gamma-1}\right)\right]$$

Le second terme à l'intérieur du crochet tend à ralentir, voire à inverser, la tendance de la bulle à imploser.

f) Calcul de la pression

La composante radiale de l'équation d'EULER $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{p}{\rho} = 0$ fournit

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0\,,$$

ce qui permettra le calcul de la pression.

Dans le cas où la pression est nulle dans la bulle, $v^2 = \frac{2p_\infty}{3\rho}(h-1)\frac{R^4}{r^4}$.

On calcule

$$v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{4p_\infty R^4}{3\rho r^5}(h-1)$$

$$v\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{p_\infty V R^2}{3\rho r^2}\quad \frac{R_0^3/R^2 - 4R}{r^2}$$

On en déduit

$$\frac{1}{p_\infty}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{R}{3r^2}\left[(4-h) + 4(h-1)\frac{R^3}{r^3}\right]$$

Par intégration on peut calculer la pression, ce qui donne

$$(3)\quad \frac{p}{p_\infty} - 1 = \frac{R}{3r}(h-4) - \frac{R^4}{3r^4}(h-1)$$

Dès que le rapport $h = R_0^3/R^3$ dépasse 4, il est facile de calculer la position $r_m$ du maximum de pression

$$(4) \quad r_m = R\left[\frac{4(h-1)}{h-4}\right]^{1/3}$$

ainsi que la pression maximale

$$(5) \quad \frac{p_m}{p_\infty} - 1 = \frac{(h-4)^{4/3}}{4(4h-4)^{1/3}}$$

On peut effectuer les mêmes calculs dans le cas de la compression adiabatique; on aboutit à

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{R}{3r^2}\left[4\left(p_\infty + \frac{p_0}{\gamma-1}\left(1-\frac{3\gamma}{4}\right)h^\gamma\right) + \frac{4R^3}{r^3}\left(p_\infty(h-1) + \frac{p_0}{\gamma-1}h\right.\right.$$
$$\left.\left.(1-h^{\gamma-1})\right) - h\left(p_\infty + \frac{p_0}{\gamma-1}\right)\right]$$

De l'équation (2) on peut déduire le rayon minimum atteint par la bulle

$$(6) \quad \frac{h-1}{h-h^\gamma} = \frac{p_0}{p_\infty(1-\gamma)}$$

On peut également calculer la pression $p - p_\infty = \int_\infty^r \frac{\partial p}{\partial r}\, dr$

$$(7) \quad p - p_\infty = \frac{R}{3r}\left[h\left(p_\infty + \frac{p_0}{\gamma-1}\right) - 4\left(p_\infty + \frac{p_0}{\gamma-1}\left(1-\frac{3\gamma}{4}\right)h^\gamma\right)\right]$$
$$- \frac{R^4}{3r^4}\left[p_\infty(h-1) + p_0(h-h^\gamma)\right]$$

la position du maximum de pression

$$(8)\quad r_m^3 = \frac{4R^3\left(p_\infty(h-1)+\frac{p_0}{\gamma-1}(h-h^\gamma)\right)}{h\left(p_\infty+\frac{p_0}{\gamma-1}\right)-4\left(p_\infty+\frac{p_0}{\gamma-1}\left(1-\frac{3\gamma}{4}\right)h^\gamma\right)}$$

enfin la pression maximale

$$(9)\quad p_m = p_\infty + \frac{R}{4r_m}\left[h\left(p_\infty+\frac{p_0}{\gamma-1}\right)-4\left(p_\infty+\frac{p_0}{\gamma-1}\left(1-\frac{3\gamma}{4}\right)h^\gamma\right)\right]$$

1.2.2 - Introduction à l'étude numérique

a) Hypothèses simplificatrices

Le phénomène de "collapse" tel qu'on l'observe expérimentalement, au voisinage d'un profil, par exemple est trop complexe pour qu'on puisse envisager de l'étudier complètement. On est amené à faire des hypothèses physiques simplificatrices de façon à retenir l'essentiel du phénomène tout en simplifiant la résolution.

Le liquide extérieur est supposé parfait, incompressible, au repos à l'instant initial; l'écoulement est donc irrotationnel et il existe un potentiel des vitesses.

La pression à l'infini est constante et uniforme dans toutes les directions; on exclut ainsi de l'étude le cas de la cavitation provoquée par ultrasons où la pression est périodique.

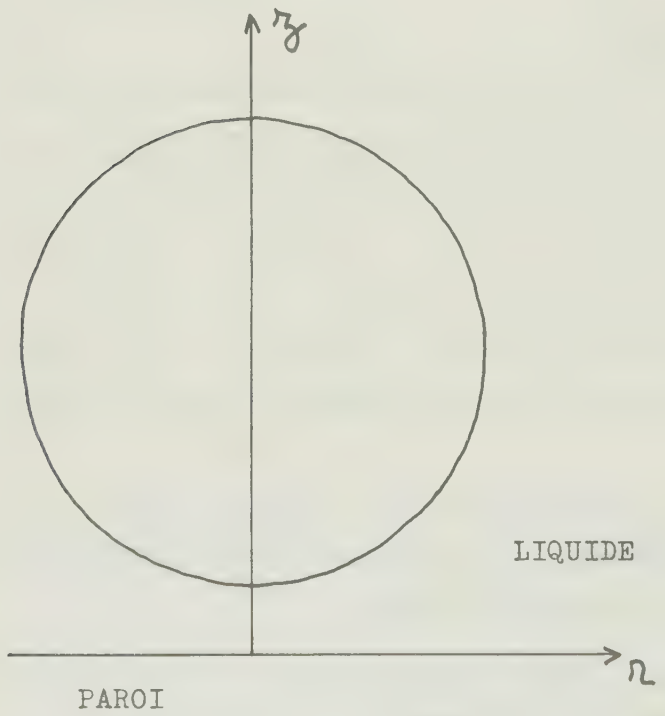
La pression dans la bulle est constante, uniforme; elle est égale à la pression de vapeur saturante et inférieure à la pression à l'infini. On a ainsi négligé la présence de gaz sec dans la bulle, qui peut provoquer le phénomène de rebond.

On peut s'affranchir de la constance de la pression au cours du temps en considérant, par exemple, qu'un gaz sec subit une compression adiabatique à l'intérieur de la bulle; par contre l'hypothèse grossière d'uniformité est essentielle : elle évite de résoudre le problème d'aérodynamique à l'intérieur de la bulle.

La paroi auprès de laquelle a lieu le "collapse" est un plan, la bulle est initialement sphérique; le phénomène aura donc la symétrie axiale.

Les effets thermodynamiques sont négligés ainsi que la gravité et la tension superficielle; les effets de ces deux derniers phénomènes seraient d'ailleurs faciles à prendre en compte mais de faible importance.

b) Présentation mathématique




Les coordonnées choisies sont cylindriques: $(r, \theta, z)$; $\theta$ n'apparaît pas dans la suite à cause de la symétrie axiale.

On introduit les notations suivantes :

$p_\infty$ : pression à l'infini

$p_c$ : pression dans la bulle

$t$ : temps

$\rho$ : masse volumique

$\vec{u} = (r, z)$ coordonnées d'un point

$\partial \mathcal{H}(t)$: surface de la bulle à l'instant $t$

$\mathcal{H}(t)$: domaine liquide extérieur à la bulle à $t$

$\phi(\vec{u},t)$: potentiel des vitesses

$$v_r(\vec{u},t) = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$v_z(\vec{u},t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

composantes de la vitesse

$p(\vec{u},t)$: pression au point $\vec{u}$

$\vec{v}(\vec{u},t) = (v_r, v_z)$

$\Delta p = p_\infty - p_c \qquad (\Delta p > 0)$

Les conditions initiales sont notées

$\partial \mathcal{H}(0)$ est une sphère

$\phi(\vec{u},0) = 0 \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{H}(0)$

Les conditions aux limites ont pour expressions

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(r,0,t) = 0 \quad \forall r,t$$ glissement à la paroi

(10) $$p(\vec{u},t) = p_c \quad \forall u \in \partial \mathcal{H}(t), \ \forall t$$ pression à la surface de la bulle

$$\lim_{\|\vec{u}\| \to \infty} p(\vec{u},t) = p_\infty \quad \forall t$$

La surface de la bulle est supposée matérielle

Une condition à l'infini est ajoutée pour assurer l'unicité de la solution du problème posé; elle exprime qu'à distance suffisante, la bulle se comporte comme un puits, soit

$$\phi(\vec{u},t) = O(\|\vec{u}\|^{-1}) \quad \text{quand} \quad \|\vec{u}\| \to \infty \quad \forall t \tag{11}$$

Le potentiel des vitesses satisfait à l'équation de LAPLACE

$$\Delta_{rz}\,\phi(\vec{u},t) = 0 \quad \forall u \in \Theta(t) \quad \forall t \tag{12}$$

La pression est régie par l'équation de BERNOULLI

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{u},t) + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + \frac{p(\vec{u},t)}{\rho} = C(t) \tag{13}$$

Une remarque s'impose : on ne connaît actuellement aucun théorème d'existence et d'unicité pour ce problème.

# CHAPITRE 2

# L'EQUATION DE BERNOULLI

## 2.1 - DECOUPAGE EN PROBLEMES STATIONNAIRES

Choix du schéma

Viscosité numérique

## 2.2 - PHENOMENES PHYSIQUES SUPPLEMENTAIRES

Tension superficielle

Compression adiabatique

## 2.1 - DECOUPAGE EN PROBLEMES STATIONNAIRES

### 2.1.1 - Choix du schéma

L'équation de BERNOULLI (1, (13)) relie la pression au potentiel des vitesses; on l'utilisera donc pour exprimer la continuité de la pression à la traversée de la surface de la bulle. Cette surface a été supposée matérielle, on introduira donc la dérivée particulaire; on peut, d'autre part, évaluer la constante $C(t)$ en se plaçant à l'infini.

Si on pose $\Delta p = p_\infty - p_c$ , on obtient

$$(1) \qquad \left( \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + \frac{\Delta p}{\rho} \right)_{\big| \partial \Theta(t)}$$

On a, bien sûr,

$$(2) \qquad \vec{v}(\vec{u},t) = \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

Ces deux dernières équations font intervenir le temps comme une variable, contrairement à ce qui se passe dans l'équation (1, (12)), où il ne joue que le rôle d'un paramètre. On peut donc penser, comme l'ont fait PLESSET et CHAPMAN [11], à discrétiser tout d'abord (1) et (2) par rapport au temps.

Si $M$ est un point matériel lié à $\partial\Theta(t)$, on obtient, entre les temps $t^{(n)}$ et $t^{(n+1)}$

$$(3)\qquad \phi_{(M)}^{(n+1)} = \phi_{(M)}^{(n)} + h\left(t^{(n+1)}, t^{(n)}, \ldots, \phi_{(M)}^{(n)}, \phi_{(M)}^{(n-1)}, \ldots, \vec{v}_{(M)}^{(n)}, \vec{v}_{(M)}^{(n-1)}, \ldots, \frac{\Delta h}{\rho}\right)$$

$$(4)\qquad \vec{\mu}_{(M)}^{(n+1)} = \vec{\mu}_{(M)}^{(n)} + \vec{k}\left(t^{(n+1)}, t^{(n)}, \ldots, \vec{\mu}_{(M)}^{(n)}, \vec{\mu}_{(M)}^{(n-1)}, \ldots, \vec{v}_{(M)}^{(n)}, \vec{v}_{(M)}^{(n-1)}, \ldots\right)$$

où $h$ est une approximation de

$$\int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} \frac{D\phi}{Dt}(M,t)\,dt$$

et $\vec{k}$ approche

$$\int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} \vec{v}(M,t)\,dt$$

Supposons maintenant connus, aux temps $t^{(0)}, t^{(1)}, \ldots t^{(n)}$, le potentiel $\phi$, la vitesse $\vec{v}$ et la position $\vec{\mu}$ du point matériel $M$. Alors les équations (3) et (4) nous fournissent le potentiel et la position du point $M$ à l'instant $t^{(n+1)}$ ; si on effectue cette opération pour tout point $M \in \partial\Theta$ , on connaît alors $\partial\Theta(t^{(n+1)})$ ainsi qu'une condition de DIRICHLET sur cette frontière pour le potentiel. Compte tenu des conditions aux limites déjà posées pour le potentiel (1, (11) et (12)), on peut résoudre un problème stationnaire mixte NEUMANN-DIRICHLET pour ce dernier. La résolution de ce problème stationnaire fournit $\vec{v}_{(M)}^{(n+1)}$ pour tout $M \in \partial\Theta(t^{(n+1)})$ ; on se trouve donc ramené au point de départ du schéma et on peut continuer à progresser dans le temps.

On a utilisé, au cours de cette étude, un schéma du premier ordre et un schéma du second ordre, tous deux explicites.

Premier ordre :

On pose $\Delta t^{(M)} = t^{(M+1)} - t^{(M)}$

$$\phi^{(M+1)}_{(M)} = \phi^{(M)}_{(M)} + \Delta t^{(M)} \left( \frac{\| \vec{v}^{(M)}_{(M)} \|^2}{2} + \frac{\Delta p}{\rho} \right)$$

$$\vec{u}^{(M+1)}_{(M)} = \vec{u}^{(M)}_{(M)} + \Delta t^{(M)} \vec{v}^{(M)}_{(M)}$$

Second ordre :

On pose $\Omega^{(M)} = \dfrac{\Delta t^{(M)}}{\Delta t^{(M-1)}}$

$$\phi^{(M+1)}_{(M)} = (\Omega^{(M)})^2 \phi^{(M-1)}_{(M)} + (1 - \Omega^{(M)\,2}) \phi^{(M)}_{(M)} + \Omega^{(M)} (t^{(M+1)} - t^{(M-1)}) \left( \frac{\| \vec{v}^{(M)}_{(M)} \|^2}{2} + \frac{\Delta p}{\rho} \right)$$

$$\vec{u}^{(M+1)}_{(M)} = (\Omega^{(M)})^2 \vec{u}^{(M-1)}_{(M)} + (1 - \Omega^{(M)\,2}) \vec{u}^{(M)}_{(M)} + \Omega^{(M)} (t^{(M+1)} - t^{(M-1)}) \vec{v}^{(M)}_{(M)}$$

Les essais numériques réalisés montrent que ces schémas deviennent instables dès l'apparition du jet rentrant.

2.1.2 - Viscosité numérique

a) La méthode naturelle, pour stabiliser le schéma, consiste à rajouter un terme dissipatif dans l'équation de BERNOULLI; c'est-à-dire à discrétiser

$$(5) \qquad \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\| \vec{v} \|^2}{2} + \frac{\Delta p}{\rho} + k \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}$$

où $s$ est l'abscisse curviligne le long de $S(t)$
et $k$ une constante positive, analogue à un coefficient de viscosité.

La surface de la bulle étant connue en des points discrets $M_j$, d'abscisses curvilignes $s_j$, on est amené à utiliser une approximation discrète de $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}$.

Notant $\Delta\Delta_j = \Delta_{j+1} - \Delta_j$ , on obtient

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \Delta^2} = \frac{2}{\Delta\Delta_j + \Delta\Delta_{j-1}} \left[ \frac{\Delta\Delta_{j-1}\left(\phi_{(M_{j+1})} - \phi_{(M_j)}\right) + \Delta\Delta_j \left(\phi_{(M_{j-1})} - \phi_{(M_j)}\right)}{\Delta\Delta_j \ \Delta\Delta_{j-1}} \right]$$

On sous-entendra désormais l'indice $^{(n)}$ de $\Omega^{(n)}$ . La discrétisation de (5) fournit

$$\phi^{(n+1)}_{(M_j)} = \Omega^2 \phi^{(n-1)}_{(M_j)} + (1-\Omega^2)\phi^{(n)}_{(M_j)} + \Omega\left(t^{(n+1)} - t^{(n-1)}\right)\left(\frac{\|\vec{v}^{(n)}_{(M_j)}\|^2}{2} + \frac{\Delta p}{\rho}\right)$$

$$+ \frac{2k\Omega\left(t^{(n+1)} - t^{(n-1)}\right)}{\Delta\Delta_j + \Delta\Delta_{j-1}} \left[ \frac{\Delta\Delta_{j-1}\left(\phi^{(n)}_{(M_{j+1})} - \phi^{(n)}_{(M_j)}\right) + \Delta\Delta_j \left(\phi^{(n)}_{(M_{j-1})} - \phi^{(n)}_{(M_j)}\right)}{\Delta\Delta_j \ \Delta\Delta_{j-1}} \right]$$

On opère de même avec $\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{v}$ .

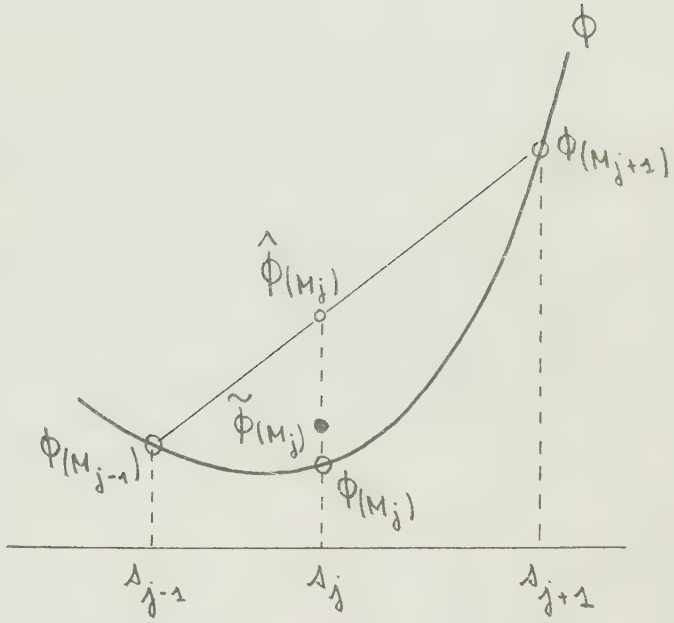
L'expérience numérique montre que l'introduction de cette viscosité artificielle a effectivement un effet stabilisant, mais qu'il est insuffisant : on ne peut mener le calcul jusqu'à la rencontre du jet rentrant et de la face inférieure de la bulle.

b) Par analogie avec certaines méthodes utilisées pour la résolution de problèmes d'aérodynamique instationnaire, cf. LAVAL [7] , on a pensé à effectuer un lissage. Après discrétisation de l'équation de BERNOULLI on calculera

$$\tilde{\phi}_{(M_j)} = (1-\omega)\,\phi_{(M_j)} + \frac{\omega}{\Delta\Delta_j + \Delta\Delta_{j-1}} \left[\Delta\Delta_{j-1}\,\phi_{(M_{j+1})} + \Delta\Delta_j\,\phi_{(M_{j-1})}\right]$$

On a

$$\frac{\tilde{\phi}(M_j) - \phi(M_j)}{\hat{\phi}(M_j) - \phi(M_j)} = \omega$$




On peut encore écrire

$$\tilde{\phi}(M_j) = \phi(M_j) + \frac{\omega}{\Delta\Delta_j + \Delta\Delta_{j-1}} \left[ \Delta\Delta_{j-1} \left( \phi_{(M_{j+1})} - \phi_{(M_j)} \right) + \Delta\Delta_j \left( \phi_{(M_{j-1})} - \phi_{(M_j)} \right) \right]$$

Le schéma prend donc la forme suivante

$$(7) \quad \tilde{\phi}^{(n+1)}_{(M_j)} = \Omega^2 \, \phi^{(n-1)}_{(M_j)} + (1-\Omega^2) \, \phi^{(n)}_{(M_j)} + \Omega \left( t^{(n+1)} - t^{(n-1)} \right) \left( \frac{\| \vec{v}^{(n)}_{(M_j)} \|^2}{2} + \frac{\Delta h}{\rho} \right) + \frac{\omega}{\Delta\Delta_j + \Delta\Delta_{j-1}} \left[ \Delta\Delta_{j-1} \left( \phi^{(n+1)}_{(M_{j+1})} - \phi^{(n+1)}_{(M_j)} \right) + \Delta\Delta_j \left( \phi^{(n+1)}_{(M_{j-1})} - \phi^{(n+1)}_{(M_j)} \right) \right]$$

On peut remarquer que le schéma (7) est analogue au schéma (6), il suffit de poser

$$k = \frac{\omega \, \Delta\Delta_j \, \Delta\Delta_{j-1}}{2\Omega \left( t^{(n+1)} - t^{(n-1)} \right)}$$

Si les pas en espace et en temps sont du même ordre, il en est de même de $k$ . Une différence cependant subsiste : $\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}$ est calculé au temps $t^{(m)}$ dans le schéma (6) et au temps $t^{(m+1)}$ dans le schéma (7). Cette différence n'est cependant pas significative, car elle est d'ordre supérieur à la précision du schéma.

C'est l'application de la méthode de lissage explicitée dans le schéma (7) qui a permis de résoudre le problème; la remarque qui précède montre que la technique mise en oeuvre entre dans le cadre des méthodes de viscosité numérique.

## 2.2 - PHENOMENES PHYSIQUES SUPPLEMENTAIRES

### 2.2.1 - Introduction de la tension superficielle

Les lois simples qui relient le saut de pression lors de la traversée de la surface de la bulle à la tension superficielle, sont essentiellement valables à l'équilibre; le problème traité ici est loin de satisfaire à cette condition. On a cependant étudié l'effet sur le "collapse" d'une tension superficielle de la forme

$$p_c - p_e = \sigma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

où $p_c$ est la pression à l'intérieur de la bulle

$p_e$ est la pression à l'extérieur de la bulle

$\sigma$ est un coefficient positif qui dépend de la nature de l'interface.

$R$ et $R'$ sont les rayons de courbure principaux de la bulle au point considéré, comptés algébriquement.

Ce phénomène est pris en compte dans l'équation de BERNOULLI qui s'écrit alors

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \qquad (8)$$

Les essais numériques réalisés montrent que, même pour des valeurs de $\sigma$ très supérieures à la normale, le terme $\frac{\|\vec{v}\|^2}{2}$ est, dès le début du collapse, de l'ordre de $10^3 \frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$. C'est-à-dire que le terme supplémentaire dû à la tension superficielle n'a pas d'influence et que le phénomène est purement dynamique.

En particulier on n'a pas pu remplacer la viscosité numérique par la tension superficielle pour stabiliser le schéma en temps.

2.2.2 - Compression adiabatique

Le phénomène physique simulé présente une différence essentielle avec la réalité : on constate très généralement la présence de gaz sec à l'intérieur des bulles de cavitation. Cette présence de gaz sec peut provoquer le phénomène de "rebond" si la compression du gaz interne est suffisamment importante pour que la bulle "rebondisse" avant la fin du "collapse". C'est une situation souvent rencontrée par les expérimentateurs.

La simulation du rebond est un problème complexe; elle nécessite en plus la résolution numérique d'un problème d'aérodynamique instationnaire interne à la bulle. Un tel problème n'a, à notre connaissance, jamais été traité. On s'est limité ici à une approximation grossière.

On a admis que la pression reste uniforme dans la bulle et que la compression est adiabatique. Si $\mathcal{V}$ est le volume de la bulle, $\mathcal{V}_0$ le volume initial, $p_0$ la pression partielle initiale de gaz sec, on peut écrire :

$$p_0 \mathcal{V}_0^{\gamma} = p \mathcal{V}^{\gamma}$$

L'équation de BERNOULLI prend alors la forme

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + \frac{\Delta p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho}\left(\frac{\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}}\right)^{\gamma} \qquad (9)$$

# CHAPITRE 3

# L'EQUATION DE LAPLACE

## 3.1 - LE PROBLEME STATIONNAIRE

## 3.2 - LA METHODE DES SINGULARITES

Justifications théoriques

Méthode numérique

Présence d'une surface libre

## 3.3 - MISE SOUS FORME VARIATIONNELLE

Démonstrations d'existence et d'unicité

Approximation par éléments finis

## 3.1 - LE PROBLEME STATIONNAIRE

La discrétisation de l'équation de BERNOULLI conduit à poser, à chaque instant $t^{(m)}$, le problème suivant :

trouver $\phi^{(m)}$ défini dans $\textcircled{H}^{(m)}$ tel que

$$\Delta \phi^{(m)} = 0 \quad \text{dans} \quad \textcircled{H}^{(m)}$$

$$\phi^{(m)}(\vec{u}) = O(\|\vec{u}\|^{-1}) \quad \text{quand} \quad \|\vec{u}\| \to \infty$$

$$(1) \qquad \phi^{(m)}\Big|_{\partial \textcircled{H}^{(m)}} = d^{(m)} \quad \text{donnée}$$

$$\frac{\partial \phi^{(m)}_{(x,0)}}{\partial y} = 0 \qquad \forall x$$

Tout se passant au temps $t^{(m)}$ on omettra désormais l'indice $^{(m)}$. On peut alors montrer que le problème (1) est équivalent à un problème variationnel bien posé dans un espace fonctionnel convenablement choisi (cf. paragraphe 3.3).

Introduisons les notations suivantes :

$\sim$ est la symétrie par rapport à la paroi

$$\Omega^c = \textcircled{H}^c \cup \widetilde{\textcircled{H}}^c \qquad \partial\Omega = \partial\textcircled{H} \cup \partial\widetilde{\textcircled{H}}$$

$$\tilde{d}(P) = d(\tilde{P})$$

$f$ est défini sur $\partial\Omega$ par $f|_{\partial\textcircled{H}} = d$

$$f|_{\partial\widetilde{\textcircled{H}}} = \tilde{d}$$

On peut alors poser le problème suivant : trouver $\phi$ défini dans $\mathbb{R}^3$, décroissant en $\|\vec{\mu}\|^{-1}$ à l'infini et tel que

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{dans} \quad \mathring{\Omega}^c$$

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \qquad (2)$$

$$\phi|_{\partial\Omega} = f \quad .$$

On montre au paragraphe 3.3 que ce problème est équivalent à un problème bien posé dans un espace fonctionnel convenablement choisi.

Pour ce problème on constate, par symétrie, que si $(\mathcal{D})$ est la paroi, $\frac{\partial \phi}{\partial z}|_{(\mathcal{D})} = 0$. On en déduit que la restriction à $\textcircled{H}$ de la solution du problème (2), n'est autre que la solution du problème (1); c'est ce second problème qu'on étudiera désormais. La méthode que nous venons d'exposer est connue sous le nom de "méthode des images".

La recherche de $\phi$ dans $\mathring{\Omega}^c$ n'apparaît pas comme indispensable à la résolution du problème posé; elle lui est cependant liée d'un point de vue théorique comme on le montrera dans la suite.

La résolution du problème (2) sera faite à l'aide d'une méthode intégrale; la première formulation de cette méthode est connue depuis fort longtemps mais conduit, dans le cas du problème de DIRICHLET, à des difficultés numériques; la seconde formulation est variationnelle et permet d'aboutir à une méthode du type "éléments finis" dont la validité est démontrée.

## 3.2 - LA METHODE DES SINGULARITES

### 3.2.1 - Justifications théoriques

On n'envisagera dans ce paragraphe que des fonctions suffisamment régulières pour permettre d'utiliser sans précautions particulières la formule de GREEN.

a) Les identités de GREEN

Soit $\mathring{\Omega}^c$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$

et $\vec{n}$ la normale à $\partial\Omega$ extérieure à $\Omega^c$.

On sait que $\int_\Omega h_i n_i \, d\Delta = \int_{\mathring{\Omega}^c} h_{i,i} \, d\nu$ ; c'est la formule de GREEN-RIEMANN.

Si l'on pose $h_i = \varphi \psi_{,i}$ on obtient

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \, d\Delta = \int_{\mathring{\Omega}^c} (\varphi \Delta\psi + (\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi \mid \overrightarrow{\text{grad}}\,\psi)) \, d\nu$$

C'est la première identité de GREEN.

En ajoutant l'identité précédente à celle obtenue avec $h_i = -\psi\varphi_{,i}$ on obtient

$$\int_{\partial\Omega} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}\right) d\Delta = \int_{\mathring{\Omega}^c} (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) \, d\nu$$

C'est la seconde identité de GREEN.

On peut particulariser $\psi$ en posant $\psi = \frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|}$ , P étant un point fixe et M le point courant.

Si $P \in \Omega$ , alors $\Delta\psi = 0$ dans $\mathring{\Omega}^c$ et

$$(3) \quad \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial \vec{n}_M} - \varphi(M) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|} \right) \right) ds_M - \int_{\mathring{\Omega}^c} \frac{\Delta\varphi(M)}{\|\overrightarrow{PM}\|} d\nu_M = 0$$

Si $P \in \mathring{\Omega}^c$ , $\frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|}$ présente une singularité au point $P$ . Isolant cette singularité dans une boule de rayon $\varepsilon$ et passant à la limite avec $\varepsilon$ , on obtient

$$(4) \quad \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial \vec{n}_M} - \varphi(M) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|} \right) \right) ds_M - \int_{\mathring{\Omega}^c} \frac{\Delta\varphi(M)}{\|\overrightarrow{PM}\|} d\nu_M = 4\pi\varphi(P)$$

Les formules (3) et (4) constituent la troisième identité de GREEN.

Si, de plus, $\varphi$ est harmonique dans $\mathring{\Omega}^c$ , la troisième identité de GREEN fournit

$$(5) \quad \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial \vec{n}(M)} - \varphi(M) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|} \right) \right) ds_M = \begin{cases} 0 \text{ si } P \in \Omega \\ 4\pi\varphi(P) \text{ si } P \in \mathring{\Omega}^c \end{cases}$$

Si, par contre, $\varphi$ est harmonique dans $\Omega$ , on peut noter $B(0,R)$ la boule de centre $0$ et de rayon $R$ et $\vec{R}$ la normale extérieure à cette boule.

On supposera

$$\varphi(\vec{\mu}) = O(\|\vec{\mu}\|^{-1})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{R}} = O(\|\vec{\mu}\|^{-2}) \quad \text{quand} \quad \|\vec{\mu}\| \to \infty$$

$\exists R_0$ tel que $\Omega^c \subset B(0,R)\ \forall R > R_0$ ; l'application de la troisième formule de GREEN à $\Omega \cap B(0,R)$ permet, après passage à la limite quand $R \to \infty$, d'aboutir à

$$(6)\quad \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1}{\|\vec{PM}\|} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial \vec{n}_M} - \varphi(M) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left( \frac{1}{\|\vec{PM}\|} \right) \right) ds_M = \begin{cases} 0 & \text{si } P \in \mathring{\Omega}^c \\ -4\pi\varphi(P) & \text{si } P \in \Omega \end{cases}$$

b) Répartition équivalente de GREEN

Si $\varphi_E$ est harmonique dans $\Omega$, avec $\varphi_E = O(\|\vec{u}\|^{-1})$ $\frac{\partial \varphi_E}{\partial \vec{R}} = O(\|\vec{u}\|^{-2})$ et $\varphi_I$ est harmonique dans $\mathring{\Omega}^c$, alors, $\forall P \in \Omega$, il vient

d'après (6) : $$\varphi_E(P) = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{-1}{4\pi\|\vec{PM}\|} \frac{\partial \varphi_E(M)}{\partial \vec{n}_M} - \varphi_E(M) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left( \frac{-1}{4\pi\|\vec{PM}\|} \right) \right) ds_M$$

d'après (5) : $$0 = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1}{4\pi\|\vec{PM}\|} \frac{\partial \varphi_I(M)}{\partial \vec{n}_M} - \varphi_I(M) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left( \frac{1}{4\pi\|\vec{PM}\|} \right) \right) ds_M$$

d'où :

$$(7)\quad \varphi_E(P) = \int_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_E(M)}{\partial \vec{n}_M} - \frac{\partial \varphi_I(M)}{\partial \vec{n}_M} \right) \times \frac{-1}{4\pi\|\vec{PM}\|} - \left( \varphi_E(M) - \varphi_I(M) \right) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left( \frac{-1}{4\pi\|\vec{PM}\|} \right) \right] ds_M$$

Supposons maintenant que $\varphi_I$ soit solution du problème suivant :

$$\Delta\varphi_I = 0 \quad \text{dans} \quad \mathring{\Omega}^c$$

$$\varphi_I|_{\partial\Omega} = f \quad \text{donné}$$

et que $\varphi_E$ soit solution du problème

$$\Delta \varphi_E = 0 \quad \text{dans } \Omega$$
$$\varphi_E |_{\partial\Omega} = f$$
$$\varphi_E = O(\|\vec{M}\|^{-1})$$

Alors

$$\varphi_E(P) = \int_{\partial\Omega} \frac{-1}{4\pi \|\vec{PM}\|} \left( \frac{\partial \varphi_E(M)}{\partial \vec{n}_M} - \frac{\partial \varphi_I(M)}{\partial \vec{n}_M} \right) ds_M .$$

On posera

$$(8) \qquad \sigma(M) = \frac{\partial \varphi_E(M)}{\partial \vec{n}_M} - \frac{\partial \varphi_I(M)}{\partial \vec{n}_M}$$

On constate alors que $\varphi_E$ est identique au potentiel créé par une répartition de sources de densité $\sigma$ sur $\partial\Omega$ ; c'est le potentiel de simple couche

$$(9) \qquad \varphi_E(P) = \int_{\partial\Omega} \frac{-1}{4\pi \|\vec{PM}\|} \sigma(M)\, ds_M$$

3.2.2 - Méthode numérique

a) Une des variantes de la méthode des singularités

On résout le problème suivant

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{dans } \Omega$$
$$(10) \qquad \phi |_{\partial\Omega} = f \quad \text{donné}$$
$$\phi = O(\|\vec{M}\|^{-1})$$

La formule (9) montre qu'il existe $\sigma(M)$ définie sur $\partial\Omega$ telle que

$$\phi(P) = -\int_{\Omega} \frac{\sigma(M)}{4\pi \|\overrightarrow{PM}\|} \, ds_M \qquad \forall P \in \Omega$$

Il nous suffira donc de connaître $\sigma$ sur $\partial\Omega$ pour calculer $\phi$ dans $\Omega$. On peut montrer que si $f$ et $\partial\Omega$ sont suffisamment régulières, $\phi$ sera continue.

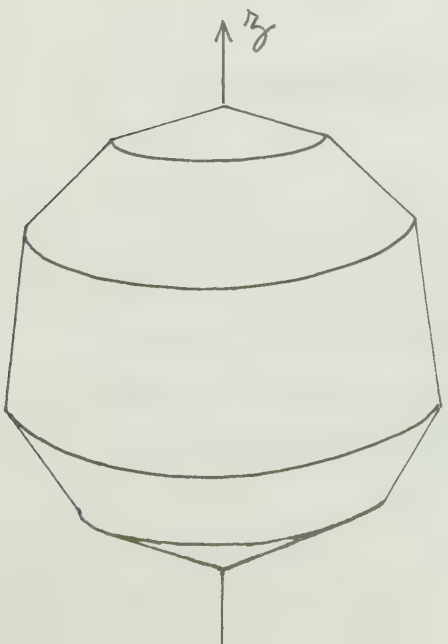
Soit $N \in \partial\Omega$

$$f(N) = \phi(N) = \lim_{P \to N} \phi(P) = \int_{\partial\Omega} \sigma(M) \times \frac{-1}{4\pi \|\overrightarrow{NM}\|} \, ds_M \qquad \forall N \in \partial\Omega$$

$\sigma$ sera donc solution de l'équation de FREDHOLM de première espèce

$$(11) \qquad f(N) = \int_{\partial\Omega} \frac{-\sigma(M)}{4\pi \|\overrightarrow{NM}\|} \, ds_M \qquad \forall N \in \partial\Omega$$

La méthode des singularités consiste à résoudre l'équation (11) par collocation. On remarquera que nous n'avons pas montré l'équivalence de (10) et (11); en particulier (11) peut ne pas admettre une solution unique.




b) Discrétisation

La surface $\partial\Omega$ considérée présente la symétrie de révolution; elle pourra donc être approchée par des troncs de cônes

$$C_i \qquad i = 1, 2M$$

($\partial\Omega$ est approchée par les $C_i$ $i = 1, M$).

$N_i$ est le milieu de la génératrice de $C_i$ dans le plan $(ro z)$.

$\sigma(M)$ est approchée par une fonction constante sur chaque $C_i$ ; on note $\sigma_i = \sigma(C_i)$

On pose alors le problème discrétisé suivant :

chercher $(\sigma_i)$ $i = 1, 2M$ tels que

$$f(N_i) = \sum_{j=1}^{2M} \frac{-1}{4\pi} \sigma_j \int_{C_j} \frac{1}{\| \overrightarrow{N_i M} \|} ds_M \qquad (12)$$

On note

$$a_{ij} = \int_{C_j} \frac{ds_M}{\| N_i M \|} \times \frac{-1}{4\pi}$$

Le problème discrétisé (12) prend alors la forme d'un système linéaire aux inconnues $\sigma_i$

$$\sum_{j=1}^{2M} a_{ij} \sigma_j = f(N_i) \qquad (13)$$

Les coefficients $a_{ij}$ peuvent se calculer analytiquement, voir par exemple HESS et SMITH [3].

Par contre, rien ne prouve que la matrice $(a_{ij})$ soit inversible. Il se trouve qu'elle est mal conditionnée dans le problème que nous traitons. Jusqu'à l'apparition du jet rentrant on peut résoudre le système (13) par la méthode de GAUSS avec recherche de pivot; mais lors du développement du jet, le conditionnement diminue de façon catastrophique, et la matrice n'est pratiquement plus inversible à

l'aide des méthodes habituelles. On a donc été amené à envisager une autre formulation pour le problème (2). L'exposé de cette formulation variationnelle et de la méthode d'éléments finis correspondante font l'objet du paragraphe 3.3.

3.2.3 - Présence d'une surface libre

On a tenté de simuler également le "collapse" au voisinage d'une surface libre. En toute rigueur, la surface libre devrait être traitée de façon analogue à la surface de la bulle. Deux différences apparaissent cependant : la surface libre s'étend jusqu'à l'infini, ce qui nous conduirait à disposer des sources jusqu'à une "grande" distance de la bulle; par ailleurs, la gravité pourrait bien jouer un rôle important à la surface de la bulle. On s'est affranchi de ces difficultés en remplaçant la condition de surface libre par une condition de DIRICHLET $\phi = 0$ appliquée à la position initiale de la surface libre: le plan $z = 0$ . On s'efforce dans la suite de développer des considérations heuristiques qui justifient cette approximation.

a) Notations

$T$ : temps total de collapse de la bulle

$L$ : distance initiale du centre de la bulle à la surface libre

$p_\infty$ : pression à l'infini pour la cote $z = 0$

$\eta(r)$ : cote de la surface libre

Posons

$$t^* = \frac{t}{T} \qquad z^* = \frac{z}{L} \qquad \eta^* = \frac{\eta}{L} \qquad \phi^* = \frac{\phi T}{L^2} \qquad r^* = \frac{r}{L}$$

Si l'on fixe, en unités MKS,

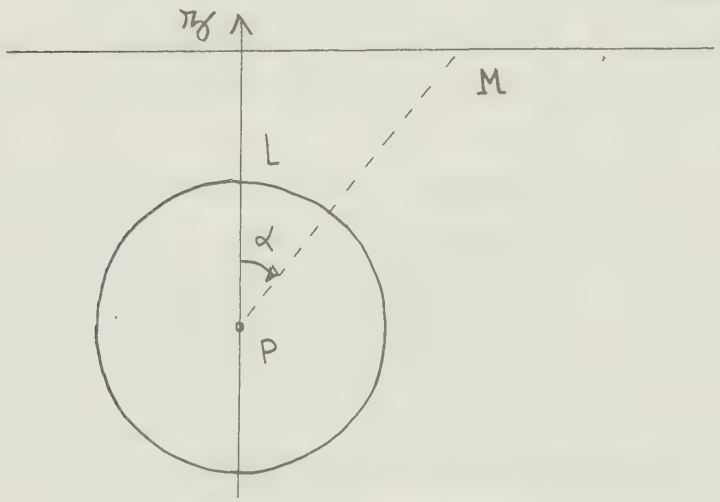
$$\Delta p = 10^2 \qquad L = 2.10^{-3}$$

et un rayon initial de la bulle égal à $10^{-3}$; les résultats numériques approchés fournissent les ordres de grandeur

$$g L = 2.10^{-2} \qquad T = 10^{-4}$$

b) Déplacement de la surface libre

Supposons la surface libre plane au temps $t^{(1)}$, on va donner une estimation du déplacement vertical $\eta$, au temps $t^{(2)}$, du point $M(R,0)$




Assimilons la bulle à un puits de débit $q(t)$, situé au point $P$, distant de $L$ de la surface libre.

$\alpha$ est l'angle de la verticale avec la droite $PM$.

On pose

$$Q = \sup_{t \in [t^{(1)}, t^{(2)}]} q(t) \qquad q^* = \frac{q}{Q}$$

Si l'on prend pour déplacement vertical de $M$ celui créé par la source en l'absence de surface libre, on obtient

$$\int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \frac{d\eta}{dt}\, dt = \frac{\cos^3 \alpha}{4\pi L^2} \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} q(t)\, dt .$$

Utilisons les variables adimensionnelles et posons

$$(14) \qquad \varepsilon = \frac{QT}{4\pi L^3}$$

on a

$$\eta^*(t^{*(2)}) - \eta^*(t^{*(1)}) = \varepsilon \cos^3\alpha \int_{t^{*(1)}}^{t^{*(2)}} q^*(t^*)\, dt^*$$

Le calcul numérique approché montre que $Q \simeq 5.10^{-6}$ , donc $\varepsilon \simeq 5.10^{-3}$.

Il est donc raisonnable de supposer que la position de la surface libre varie peu au cours du calcul.

c) Modification de la valeur du potentiel à la surface libre

Ecrivons, sous forme adimensionnelle, l'équation de BERNOULLI à la surface libre:

$$\frac{d\phi^*}{dt^*} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{grad}^*\,\phi^*)^2 - \frac{gT^2}{L}\eta^*$$

Posons

$$(15) \qquad \mathcal{E} = \frac{gT^2}{L}$$

On a $\mathcal{E} \simeq 0{,}5.10^{-4}$ .

Utilisons toujours la même source

$$\int_{t^{*(1)}}^{t^{*(2)}} \frac{d\phi^*}{dt^*}\, dt^* = \frac{1}{2}\int_{t^{*(1)}}^{t^{*(2)}} (\overrightarrow{grad}^*\, \phi^*)^2\, dt^* - \varepsilon \int_{t^{*(1)}}^{t^{*(2)}} \eta^*(t^*)\, dt^*$$

Or

$$\| grad^* \phi^* \| = e \cos^2\alpha\, q^* \quad .$$

On en déduit

$$\phi^*(t^{*(2)}) - \phi^*(t^{*(1)}) = \frac{e^2}{2} \cos^4\alpha \int_{t^{*(1)}}^{t^{*(2)}} (q^*(t^*))^2 dt^* - \varepsilon \int_{t^{*(1)}}^{t^{*(2)}} \eta^*(t^*)\, dt^*$$

Comparons à la variation de $\phi^*$ à la surface de la bulle

$$\frac{d\phi^*}{dt^*} = \frac{1}{2} (grad^* \phi^*)^2 + \frac{\Delta h}{\rho} \frac{T^2}{L^2} - \varepsilon \eta^*_{bulle}$$

nous fournit

$$\phi^*(t^{*(2)}) > \phi^*(t^{*(1)}) + \frac{\Delta h}{\rho} \frac{T^2}{L^2} (t^{*(2)} - t^{*(1)})$$

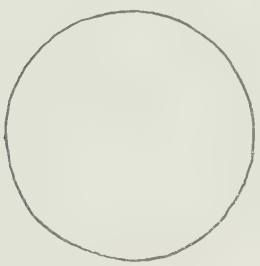
$\frac{\Delta h}{\rho} \frac{T^2}{L^2}$ étant d'ordre 1

Soit $d^{*(1)}$ le potentiel à la surface de la bulle en $t^{*(1)}$ ; on aura alors, à la surface libre

$$\phi^*(t^{*(2)}) - \phi^*(t^{*(1)}) = O(e^2\, d^{*(2)})$$

On peut donc affirmer que le potentiel à la surface libre varie peu d'un pas au suivant.

d) Vitesse en un point de la surface de la bulle




Supposons qu'à l'instant $t^{(M)}$, le potentiel à la surface libre soit nul. Alors, au temps $t^{(M+1)}$, le potentiel à la surface de la bulle est $d^*$ ; le potentiel adimensionné à la surface libre sera noté $O(e^2 d^*)$.

Le problème à résoudre au temps $t^{(M+1)}$ est donc le suivant :

trouver $\psi^*$ tel que

(16)
$$\Delta^* \psi^* = 0$$
$$\psi^*_{|z^*=0} = O(e^2 d^*)$$
$$\psi^*_{|\partial\mathcal{H}} = d^*$$
$$\psi^* = O(\|\vec{u}^*\|^{-1}) \text{ à l'infini}$$

Le problème résolu numériquement sera, en réalité,

trouver $\phi^*$ tel que

(17)
$$\Delta^* \phi^* = 0$$
$$\phi^*_{|z^*=0} = 0$$
$$\phi^*_{|\partial\mathcal{H}} = d^*$$
$$\phi^* = O(\|\vec{u}^*\|^{-1}) \text{ à l'infini}$$

Notons $\Theta^*$ la solution de

$$\Delta^* \Theta^* = 0$$

$$\Theta^*|_{z^*=0} = O(e^2 d^*)$$

$$\Theta^* = O(\|\vec{u}^*\|^{-1}) \text{ à l'infini}$$

et $\chi^*$ la solution de

$$\Delta^* \chi^* = 0$$

$$\chi^*|_{z^*=0} = 0$$

$$\chi^*|_{\partial\Theta} = -\Theta^*|_{\partial\Theta}$$

On aura, par linéarité

$$\psi^* = \phi^* + \Theta^* + \chi^*$$

Notons

$$e^2 \bar{d}^* = \sup_{z^*=0} |e^2 d^*|$$

Le principe du maximum nous montre que $|\Theta^*|_{|\partial\Theta} \leqslant e^2 \bar{d}^*$

On a déjà, par ailleurs, implicitement admis que la fonctionnelle

$\chi^*|_{\partial\Theta} \rightsquigarrow \text{grad}^* \chi^*|_{\partial\Theta}$ est continue, et que sa norme est d'ordre 1; dans l'hypothèse contraire, nos calculs numériques ne peuvent en effet fournir de résultat correct...

On aura donc

$$\|\overrightarrow{\text{grad}}^* \chi^*\|_{|\partial\Theta} = O(e^2 \|\overrightarrow{\text{grad}}^* \phi^*\|_{|\partial\Theta})$$

La même hypothèse nous conduit à poser

$$\|\overrightarrow{\text{grad}}^* \Theta^*\|_{|z^*=0} = O(e^2 \bar{d}^*)$$

les dérivées partielles de $\theta^*$ étant harmoniques, le principe du maximum nous montre que

$$\| \overrightarrow{grad}^* \theta^* \|_{|\partial \textcircled{H}} = O(e^2 \| \overrightarrow{grad}^* \phi^* \|_{|\partial \textcircled{H}})$$

et, par linéarité

$$\| \overrightarrow{grad}^* \psi^* - \overrightarrow{grad}^* \phi^* \|_{|\partial \textcircled{H}} = O(e^2 \| grad^* \phi^* \|_{|\partial \textcircled{H}}$$

Ceci justifie qu'on résolve le problème (17) à la place du problème (16).

e) Problème traité

Le problème stationnaire, en présence d'une surface libre, a donc été ramené à la formulation suivante :

trouver $\phi$ défini dans $\textcircled{H}$ , tel que

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{dans} \quad \textcircled{H}$$

$$\phi(\vec{\pi}) = O(\| \vec{\pi} \|^{-1}) \quad \text{quand} \quad \| \vec{\pi} \| \longrightarrow \infty$$

(18) $$\phi_{|\partial \textcircled{H}} = d \quad \text{donné}$$

$$\phi(\Omega, 0) = 0 \quad \forall \Omega$$

On définira $h$ sur $\partial\Omega$ par

$$h_{|\partial \textcircled{H}} = d$$

$$h_{|\tilde{\partial} \textcircled{H}} = -\tilde{d}$$

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe 3.1 permet de ramener la solution de (18) à celle du problème suivant :

trouver $\phi$ défini dans $\mathbb{R}^3$ , décroissant au moins en $(\|\vec{u}\|^{-1})$ à l'infini et tel que

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{dans} \quad \mathring{\Omega}^c$$

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{19}$$

$$\phi|_{\partial\Omega} = h$$

## 3.3 - MISE SOUS FORME VARIATIONNELLE

Nous suivons ici une étude récente de NEDELEC et PLANCHARD [10].

### 3.3.1 - Démonstrations d'existence et d'unicité

a) Notations

$\dot{\Omega}^c$ est un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^3$

$$r = \left( \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \right)^{1/2}$$

Les espaces suivants seront utilisés

$$H^1(\dot{\Omega}^c) = \left\{ \ell \in L^2(\dot{\Omega}^c) \mid \frac{\partial \ell}{\partial x_i} \in L^2(\dot{\Omega}^c) \ , \ i = 1,3 \right\}$$ , muni de la norme

$$\| \ell \|_{H^1} = \left( \int_{\dot{\Omega}^c} \sum_{|\alpha| \leq 1} |\partial^\alpha \ell|^2 \, dv \right)^{1/2}$$

$$H_0^1(\dot{\Omega}^c) = \left\{ \ell \in H^1(\dot{\Omega}^c) \mid \ell|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$$W^1(\Omega) = \left\{ \ell \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid (1+r^2)^{-1/2} \ell \in L^2(\Omega) \ , \ \frac{\partial \ell}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ , \ i = 1,3 \right\}$$

avec

$$\| \ell \|_{W^1} = \left( \left\| \frac{\ell}{\sqrt{1+r^2}} \right\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial \ell}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

$$W_0^1(\Omega) = \left\{ \ell \in W^1(\Omega) \mid \ell|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$H^{1/2}(\partial\Omega)$ est l'espace des traces sur $\Omega$ des éléments de $H^1(\dot{\Omega}^c)$

$H^{-1/2}(\partial\Omega)$ est son dual

$$W_0^1(\mathbb{R}^3) = \left\{ \ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \mid (1+\Lambda^2)^{-1/2} \ell \in L^2(\mathbb{R}^3),\ \frac{\partial \ell}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^3),\ i=1,3 \right\}$$

il est muni de la norme

$$\|\ell\|_{W_0^1} = \left( \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \ell}{\partial x_i} \right|^2 . dv \right)^{1/2}$$

On se donne $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

$\psi$ est un relèvement de $f$, à support compact, élément de $W_0^1(\mathbb{R}^3)$.

b) Problème intérieur

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 \quad \text{dans } \mathring{\Omega}^c \\ \phi_{|\partial\Omega} &= f \end{aligned} \tag{20}$$

Il est équivalent au problème variationnel suivant : trouver

$$u = \phi - \psi \in H_0^1(\mathring{\Omega}^c) \text{ tel que } \forall \psi \in H_0^1(\mathring{\Omega}^c)$$

on ait

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathring{\Omega}^c} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dv = -\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathring{\Omega}^c} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dv \tag{21}$$

La forme bilinéaire

$$(u, \psi) \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathring{\Omega}^c} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dv$$

et la forme linéaire

$$\psi \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{3} \int_{\dot{\Omega}^c} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dv$$

sont trivialement continues pour la topologie de $H_0^1(\dot{\Omega}^c)$.

Par ailleurs, l'inégalité de FRIEDRICHS permet de montrer que $\left( \sum_{i=1}^{3} \int_{\dot{\Omega}^c} \left| \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right|^2 dv \right)^{1/2}$ est une norme équivalente à celle de $H_0^1(\dot{\Omega}^c)$; le problème est donc coercif.

c) Problème extérieur

$$\phi = O(\|\vec{x}\|^{-1}) \quad , \|\vec{x}\| \longrightarrow \infty$$

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

(22)

$$\phi|_{\partial\Omega} = f$$

Il est équivalent au problème variationnel suivant :

trouver $u = \phi - \psi \in W_0^1(\Omega)$

tel que $\forall \psi \in W_0^1(\Omega)$

on ait

$$(23) \qquad \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dv = - \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dv$$

La continuité des formes linéaires et bilinéaires du second et du premier membre est toujours triviale. L'inégalité de HARDY permet de montrer que $\left( \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \ell}{\partial x_i} \right|^2 dv \right)^{1/2}$ est une norme équivalente à celle de $W_0^1(\Omega)$, d'où la coercivité.

On peut, de même, montrer que les problèmes (1) et (18) sont équivalents à des problèmes bien posés.

d) Problème complet

$$\phi = O(\|\vec{u}\|^{-1}) \ , \ \|\vec{u}\| \to \infty$$

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans } \mathring{\Omega}^c$$

(24)

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\phi_{|\partial\Omega} = \ell$$

Par recollement des solutions obtenues pour les problèmes intérieurs et extérieurs, on obtient une solution de (24).

On montre alors (NEDELEC [10]) que $\phi \in K$ où

$$K = \left\{ \ell \in W_0^1(\mathbb{R}^3) \mid \Delta\ell \in (W_0^1(\mathbb{R}^3))' \ , \ \mathrm{Supp}(\Delta\ell) \subset \partial\Omega \right\}$$

et que (24) définit un isomorphisme $H^{1/2}(\partial\Omega) \longleftrightarrow K$

e) Un second problème variationnel

Soit $\sigma \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$; on pose le problème suivant :

trouver

$$\phi \in W_0^1(\mathbb{R}^3) \qquad \text{tel que} \quad \forall \psi \in W_0^1(\mathbb{R}^3)$$

(25)

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \, dv = - \langle \sigma, \psi_{|\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$$

La continuité des applications linéaires et bilinéaires du second et du premier membre par rapport à $\phi$ et $\psi \in W_0^1(\mathbb{R}^3)$ est encore facile, car

l'application

$$\begin{array}{ccc} \psi & \rightsquigarrow & \psi_{|\partial\Omega} \\ W_0^1(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & H^{1/2}(\partial\Omega) \end{array}$$

est continue.

De plus, on a défini $\left( \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 dv \right)^{1/2}$ comme étant la norme de $W_0^1(\mathbb{R}^3)$; le problème (25) est donc coercif.

On peut remarquer que $\phi \in K$ ; en effet si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dv = - \int_{\mathbb{R}^3} \phi \Delta \psi \, dv \qquad \text{(GREEN)}$$

$$= - \langle \phi, \Delta \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \langle \Delta \phi, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$$

On a donc

$$\langle \Delta \phi, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle \sigma, \psi|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$$

Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ dans $W_0^1(\mathbb{R}^3)$ on obtient

$$\langle \Delta \phi, \psi \rangle_{W_0^{1\prime}, W_0^1} = \langle \sigma, \psi|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$$

Le support de $\Delta\phi$ est donc bien inclus dans $\partial\Omega$, et $\phi \in K$.

Le problème (25) définit donc un isomorphisme $H^{-1/2}(\partial\Omega) \longleftrightarrow K$

On peut même expliciter la solution de (25) dans le cas où $\sigma \in \mathcal{D}(\partial\Omega)$ $\phi$ est donné par

$$\phi(P) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma(M)}{\| \overrightarrow{MP} \|} ds_M \qquad (26)$$

En effet, la formule précédente définit un élément de $W_0^1(\mathbb{R}^3)$ d'après des propriétés classiques (KELLOGG [4] ); si, par ailleurs,

$\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dv = -\int_{\mathbb{R}^3} \phi \, \Delta\psi \, dv = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\psi(P) \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma(M)}{\|\overrightarrow{MP}\|} \, ds_M \, dv_P$$

$$= \int_{\partial\Omega} \sigma(M) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta\psi(P)}{4\pi \|\overrightarrow{MP}\|} \, dv_P \, ds_M$$

$$= \int_{\partial\Omega} \sigma(M) \left\langle \Delta\psi_{\cdot}(P), \frac{1}{4\pi \|\overrightarrow{MP}\|} \right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} ds_M$$

$$= -\langle \sigma, \psi_{|\partial\Omega} \rangle$$

Ce résultat s'étend à $\psi \in W_0^1(\mathbb{R}^3)$ par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ dans $W_0^1(\mathbb{R}^3)$.

---

On peut donc dire que l'application

$$\sigma \rightsquigarrow \frac{-1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma(M)}{\|\overrightarrow{MP}\|} \, ds_M \quad : \mathcal{D}(\partial\Omega) \longrightarrow K$$

est continue pour la topologie de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et se prolonge en un isomorphisme $H^{-1/2}(\partial\Omega) \longleftrightarrow K$ ; l'extension étant unique par densité de $\mathcal{D}(\partial\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

f) Un troisième problème variationnel

On se donne $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$; on cherche $\sigma \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ tel que,

$$\frac{-1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma(M) \, \sigma'(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|} \, ds_M \, ds_P = \langle \sigma', f \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} \tag{27}$$

On peut démontrer que l'application bilinéaire du premier membre est continue de $H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ . Elle est également coercive.

Soit, en effet, $\phi$ solution de (25). Si $\sigma \in \mathcal{D}(\partial\Omega)$ on aura

$$\phi(M) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|} \, ds_P$$

et

$$\langle \sigma, \phi_{|\partial\Omega} \rangle = -\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 dv$$

donc

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma(M)\,\sigma(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|} ds_M ds_P = -\langle \sigma, \phi_{|\partial\Omega} \rangle = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 dv$$

Or, on a montré que $\sigma \rightsquigarrow \phi$ est un isomorphisme, $\Rightarrow \exists\, \alpha > 0$ tel que

$H^{-1/2} \longleftrightarrow K$

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 dv \geqslant \alpha \|\sigma\|^2_{H^{-1/2}}$$

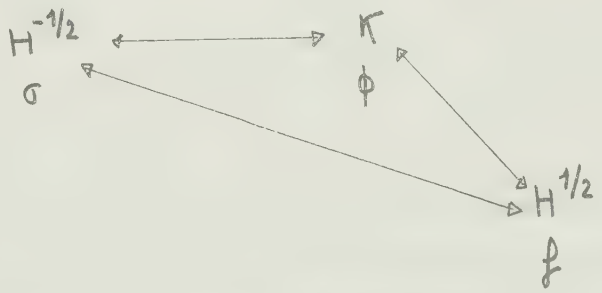
et

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma(M)\,\sigma(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|} ds_M ds_P \geqslant \alpha \|\sigma\|^2_{H^{-1/2}}$$

Cette propriété s'étend, par densité, au cas où $\sigma \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$; d'où la coercivité.

Le problème (27) définit donc un isomorphisme $H^{-1/2}(\partial\Omega) \longleftrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$

Nous disposons maintenant des trois isomorphismes représentés sur le diagramme ci-dessous; nous montrerons que ce diagramme est commutatif.




Soit $\sigma \in \mathcal{D}(\partial\Omega)$; on lui associe $f$ par (27), puis $\phi$ solution de (25). On a donc

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma(M)\,\sigma(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|} ds_M ds_P = \langle \sigma, f \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$$

On a déjà montré que

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}\frac{\sigma(M)\,\sigma(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|}\,ds_M\,ds_P = \langle \sigma, \phi_{|\partial\Omega}\rangle$$

donc $\langle \sigma, f - \phi_{|\partial\Omega}\rangle = 0 \;\forall \sigma \in \mathcal{D}(\partial\Omega)$, ceci s'étend, par densité, à $\sigma \in H^{-1/2}(\partial\Omega) \Rightarrow f = \phi_{|\partial\Omega}$.

On a donc montré que résoudre (24) était équivalent à résoudre (27) puis (25); la résolution de ce dernier problème est d'ailleurs triviale pour les $\sigma$ assez réguliers, car on dispose de la formule (26), explicite.

La résolution numérique portera donc sur le problème (27).

3.3.2 - Approximation par éléments finis

a) Notations

Soit

$$V_h \subset H^{-1/2}(\partial\Omega) \qquad V'_h \subset H^{1/2}(\partial\Omega)$$

$V_h$ et $V'_h$ étant de dimension finie.

$(w_i)$ $i=1,N$ est une base de $V_h$

$f_h$ est une approximation de $f$ dans $V'_h$

$(w'_i)$ $i=1,N'$ est une base de $V'_h$

b) Problème discrétisé

On pose le problème suivant :

trouver $\sigma_h \in V_h$ tel que $\forall \sigma'_h \in V_h$ on ait

$$(28)\qquad -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}\frac{\sigma_h(M)\,\sigma'_h(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|}\,ds_M\,ds_P = \langle \sigma_h, f_h\rangle$$

Ce problème est coercif, de même que (27).

Pratiquement, on pose

$$\sigma'_h = \sum_{i=1}^{N} \sigma'_i w_i \qquad \sigma_h = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j w_j \qquad f_h = \sum_{k=1}^{N'} f_k w'_k$$

(28) s'écrit donc $\forall \sigma'_j \in \mathbb{R} \quad j = 1, N$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma'_i \sigma_j \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{w_i(M)\, w_j(P)}{-4\pi \| \overrightarrow{MP} \|} ds_M ds_P = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N'} \sigma'_i f_k \int_{\partial\Omega} w_i(M) w'_k(M) ds_M$$

On posera

$$a_{ij} = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{w_i(M)\, w_j(P)}{-4\pi \| \overrightarrow{MP} \|} ds_M ds_P$$

Le problème (28) est équivalent au système linéaire

$$(29) \qquad \forall i = 1, N \quad \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \sigma_j = \sum_{k=1}^{N'} f_k \int_{\partial\Omega} w_i(M) w'_k(M) ds_M$$

c) Matrice de rigidité

$(a_{ij})$ est la matrice de rigidité du système (29); elle est symétrique, définie, positive, et donc inversible.

La symétrie est tout à fait évidente; posons, par ailleurs,

$$a(\sigma_h, \sigma_h) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

(28) est coercif, c'est-à-dire $\exists \alpha > 0$ tel que $a(\sigma_h, \sigma_h) \geq \alpha \|\sigma_h\|^2$ donc

$$a(\sigma_h, \sigma_h) \geq 0 \quad \forall \sigma_h$$

et

$$a(\sigma_h, \sigma_h) = 0 \Rightarrow \sigma_h = 0 .$$

Le système (29) sera résolu par la méthode de CHOLESKY.

d) Choix de l'espace $V_h$

Les majorations d'erreur ont été établies, pour différents types d'éléments, par NEDELEC [10]. Nous avons choisi d'approcher la surface de la bulle par des troncs de cône de révolution $C_j$, $j = 1,2M$ et de prendre pour $V_h$, l'espace des fonctions constantes sur chaque $C_j$. On se place donc sur $\partial\Omega_h$, approximation de $\partial\Omega$ et on constate que $V_h \subset H^{-1/2}(\partial\Omega_h)$; on construit de même $V'_h$ ensemble des fonctions continues linéaires sur chaque $C_j$, on a $V'_h \subset H^{1/2}(\partial\Omega_h)$

$$W_i(M_j) = \delta_{ij} \text{ si } M_j \in C_j$$

$$a_{ij} = \int_{C_i} \int_{C_j} \frac{ds_M\, ds_P}{-4\pi \|\overrightarrow{MP}\|} \tag{30}$$

Le système (29) prend la forme

$$\sum_{j=1}^{2M} a_{ij}\sigma_j = \sum_{k=1}^{N'} f_k \int_{C_i} w'_k\, ds_M \quad i=1,2M \tag{31}$$

Malgré le choix particulièrement simple de $V_h$ , il n'existe pas, à notre connaissance, de formule analytique permettant le calcul des $a_{ij}$ ; on conçoit donc que le choix d'un espace $V_h$ de fonctions plus régulières entraînerait de sérieuses difficultés de calcul pour les coefficients $a_{ij}$ .

# CHAPITRE 4

# PROBLEMES TECHNIQUES ET INFORMATIQUES

## 4.1 - STRUCTURE DU PROGRAMME

Organigramme du programme principal

Calcul des coefficients d'influence

Interpolation par splines

## 4.2 - DISCRETISATION AUTOMATIQUE

Généralités

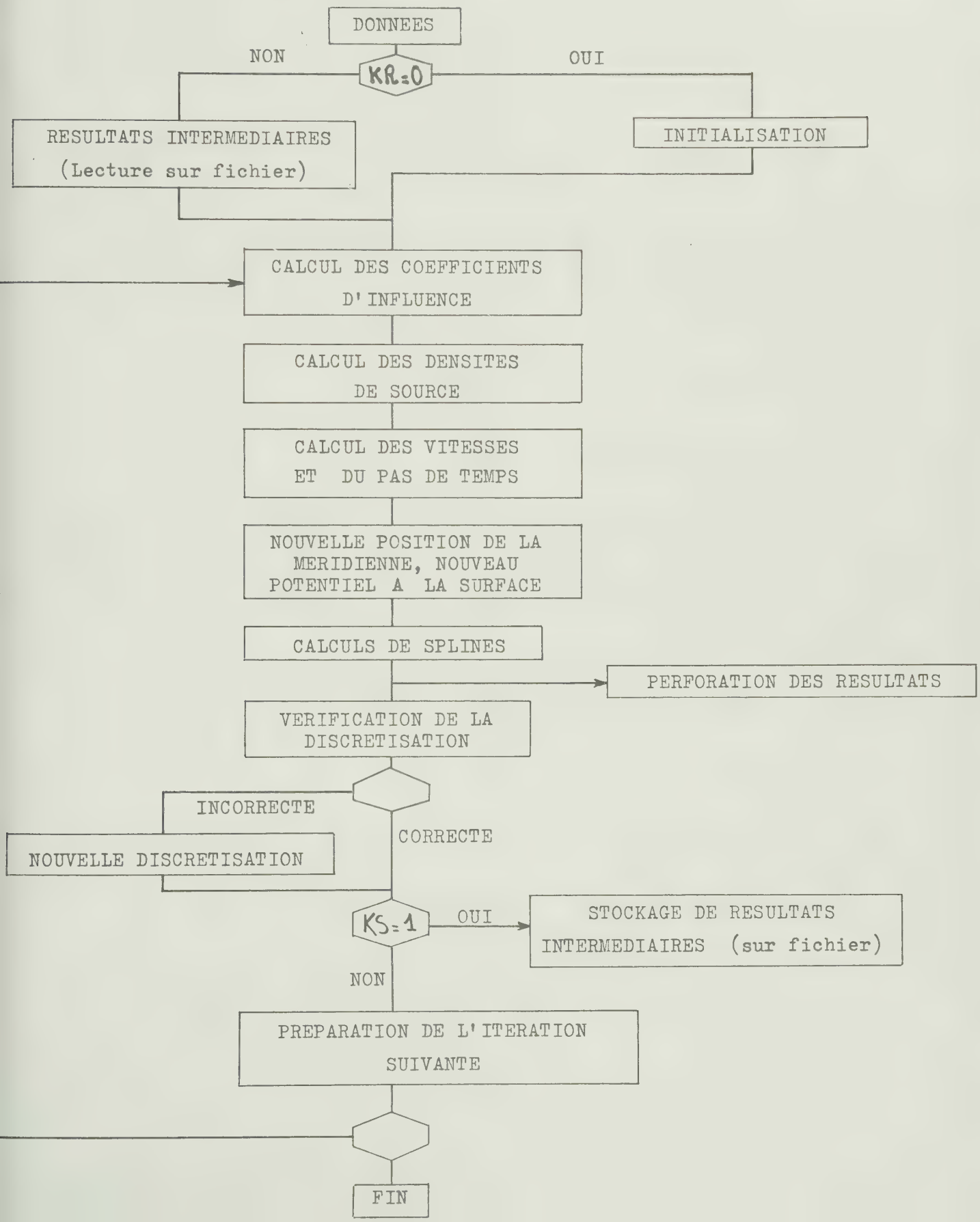
Construction d'un prédicteur

Méthode de HOOKE et JEEVES

Mise en oeuvre

## 4.1 - STRUCTURE DU PROGRAMME

### 4.1.1 - Organigramme du programme principal



Cet organigramme appelle quelques remarques.

Le calcul des coefficients d'influence, l'interpolation par splines, la discrétisation, sont traités en détail ci-dessous.

Le temps C.P.U. nécessaire pour mener à bien le collapse d'une bulle est compris entre 30 et 70 minutes sur UNIVAC 1108. L'encombrement mémoire est d'environ 40 K mots de 16 bits. On a adopté le parti de fractionner ce calcul en plusieurs essais numériques; le premier essai part de la bulle sphérique et du liquide au repos, le $N^{ième}$ utilise, comme point de départ, les résultats du $(N-1)^{ième}$; la simulation est arrêtée quand le jet rentrant atteint la face inférieure de la bulle.

### 4.1.2 - Calcul des coefficients d'influence

a) Matrice de rigidité

Le problème à résoudre se présente sous la forme (3, (31)). On considère donc l'ensemble de deux bulles; la bulle réelle et une bulle symétrique par rapport au plan $\eta_3 = 0$ . La symétrie par rapport à ce plan est notée $\sim$ . La bulle réelle est approchée par les cônes $C_i$ , $i=1,M$ . On construit les matrices

$$\Xi^{\ell} = (\xi^{\ell}_{i,j}) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \qquad \ell = 1,4$$

On pose

$$\xi^1_{i,j} = \int_{C_i}\int_{C_j} \frac{ds_M\, ds_P}{\|\overrightarrow{MP}\|} \qquad \xi^2_{i,j} = \int_{C_i}\int_{\tilde{C}_j} \frac{ds_M\, ds_P}{\|\overrightarrow{MP}\|}$$

$$\xi^3_{i,j} = \int_{\tilde{C}_i}\int_{C_j} \frac{ds_M\, ds_P}{\|\overrightarrow{MP}\|} \qquad \xi^4_{i,j} = \int_{\tilde{C}_i}\int_{\tilde{C}_j} \frac{ds_M\, ds_P}{\|\overrightarrow{MP}\|}$$

La matrice $B = (\beta_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} \Xi^1 & \Xi^2 \\ \hline \Xi^3 & \Xi^4 \end{array}\right)$ est la matrice de rigidité associée au problème discrétisé (3, (29)).

On pose

$$\pi_i = \sum_{k=1}^{N'} \varphi_k \int_{C_i} ds_M \, w'_k(M) \qquad \rho_i = \sum_{k=1}^{N'} \varphi_k \int_{\tilde{C}_i} w'_k(M) \, ds_M$$

On notera

$$\Sigma = (\sigma_i) \quad T = (\tau_i) \quad \Pi = (\pi_i) \quad R = (\rho_i) \quad i = 1, M$$

La transcription matricielle du système (3, (31)) est donc la suivante :

$$(1) \qquad \frac{-1}{4\pi} B \begin{pmatrix} \Sigma \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi \\ R \end{pmatrix}$$

Les égalités suivantes sont évidentes, elles vont permettre de réduire la dimension du système à résoudre

$$\xi^2_{i,j} = \xi^3_{i,j} \qquad \xi^1_{i,j} = \xi^4_{i,j} \qquad i,j = 1, M.$$

$$\pi_i = \rho_i \qquad i = 1, M$$

Le système (1) prend donc la forme

$$\frac{-1}{4\pi} \left( \Xi^1 \Sigma + \Xi^3 T \right) = \Pi$$
$$\frac{-1}{4\pi} \left( \Xi^3 \Sigma + \Xi^1 T \right) = \Pi$$

On en déduit

$$(\Xi^1 - \Xi^3)(\Sigma - T) = 0$$

Or $B$ est inversible, comme on l'a montré au chapitre 3; $\Xi^1 - \Xi^3$ l'est donc également, on en déduit $\Sigma = T$.

Le système (1) se réduit donc à

$$(2) \quad \frac{-1}{4\pi} A\Sigma = \Pi$$

où on a posé

$$(3) \quad A = \Xi^1 + \Xi^3$$

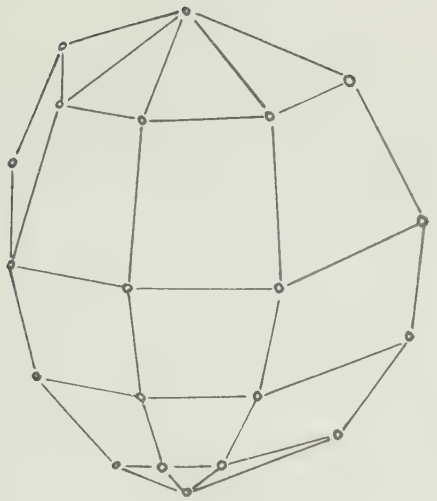
b) Coefficients $\alpha_{ij}$ de la matrice $A$

Il s'agit de calculer

$$\alpha_{ij} = \int_{C_i \cup \tilde{C}_i} \int_{C_j} \frac{ds_M\, ds_P}{\|\overrightarrow{MP}\|}$$

On constate, tour d'abord, que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad i,j = 1,M$

Le calcul de $\int_{C_j} \frac{ds_M}{\|\overrightarrow{MP}\|}$ peut être réalisé par voie analytique, mais fait intervenir le calcul d'une quantité exprimée sous forme de série. On a préféré opérer une approximation supplémentaire de façon à simplifier le calcul.



Chaque cône $C_i$ est approché par des trapèzes isocèles égaux

$$T_{i,k} \quad k = 1, N_i$$

On peut écrire

$$\alpha_{ij} \simeq \sum_{m=1}^{N_i} \int_{T_{i,m} \cup \tilde{T}_{i,m}} \int_{C_j} \frac{ds_M \, ds_P}{\| \overrightarrow{MP} \|}$$

$$= N_i \int_{T_{i,1} \cup \tilde{T}_{i,1}} \int_{C_j} \frac{ds_M \, ds_P}{\| \overrightarrow{MP} \|}$$

$$\simeq N_i \sum_{k=1}^{N_j} \int_{T_{i,1} \cup \tilde{T}_{i,1}} \int_{T_{j,k}} \frac{ds_M \, ds_P}{\| \overrightarrow{MP} \|}$$

On notera

$$KP_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \int_{T_{i,1} \cup \tilde{T}_{i,1}} \int_{T_{j,k}} \frac{ds_M \, ds_P}{\| \overrightarrow{MP} \|}$$

et l'on aura donc

$$\alpha_{ij} \simeq N_i \, KP_{i,j} \qquad \text{et} \qquad N_i \, KP_{i,j} \simeq N_j \, KP_{j,i}$$

Il n'existe pas, à notre connaissance, de formule analytique permettant de calculer les $KP_{i,j}$ ; l'intégration externe sera donc effectuée par voie numérique, au moyen d'une formule à quatre points : les points $G_{i,\ell} \in T_{i,1}$ seront affectés de poids $\omega_{i,\ell}$ $\ell = 1,4$ . Le détail des formules se trouve dans l'Annexe AN 3 .

On notera

$$G^1_{i,\ell} = G_{i,\ell} \qquad G^2_{i,\ell} = \tilde{G}_{i,\ell}$$

et on posera

$$GP^{\Pi}_{i,j,k,\ell} = \int_{T_{j,k}} \frac{ds_M}{\| \overrightarrow{M G^2_{i,\ell}} \|} \qquad \Pi = 1,2$$

On pourra écrire

$$KP_{i,j} \simeq \sum_{K=1}^{N_j} LP_{i,j,k} \qquad \text{où} \quad LP_{i,j,K} = \sum_{\ell=1}^{4} \omega_{i,\ell} \left( \sum_{\Pi=1}^{2} GP^{\Pi}_{i,j,k,\ell} \right)$$

Le calcul des $GP^2_{i,j,k,\ell}$ peut, par contre, être effectué analytiquement; les formules de l'Annexe I permettent de poser

$$GP^{\Pi}_{i,j,k,\ell} = \sum_{m=1}^{4} CP^{\Pi}_{i,j,k,\ell,m} \qquad \Pi = 1,2$$

c) Calcul des coefficients de vitesse

Soit $Q_i$ le centre de gravité du trapèze $T_{i,1}$ ; $T_{i,1}$ est choisi tel que $Q_i \in$ plan $\pi o z$ .

La formule (3, (26)) permet d'écrire

$$\phi(Q_i) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma(M)}{\|\overrightarrow{MP}\|} ds_M$$

$$\simeq \frac{-1}{4\pi} \left( \sum_{j=1}^{M} \sigma_j \int_{C_j} \frac{ds_M}{\|\overrightarrow{MQ_i}\|} + \sum_{j=1}^{M} \tau_j \int_{\tilde{C}_j} \frac{ds_M}{\|\overrightarrow{MQ_i}\|} \right.$$

$$= \frac{-1}{4\pi} \sum_{j=1}^{M} \sigma_j \left( \int_{C_j \cup \tilde{C}_j} \frac{ds_M}{\|\overrightarrow{MQ_i}\|} \right)$$

La vitesse au point $Q_i$ a , alors, pour expression

$$\vec{v}(Q_i) \simeq \frac{-1}{4\pi} \sum_{j=1}^{M} \sigma_j \overrightarrow{\text{grad}} \left( \int_{C_j \cup \tilde{C}_j} \frac{ds_M}{\|\overrightarrow{MQ_i}\|} \right)$$

On a

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \int_{C_j \cup \tilde{C}_j} \frac{ds_M}{\|\overrightarrow{MQ_i}\|} \right) \simeq \sum_{k=1}^{N_j} \int_{T_{j,k} \cup \tilde{T}_{j,k}} \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{MQ_i}\|} \right) ds_M$$

On pose

$$KX_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \int_{T_{j,k} \cup \tilde{T}_{j,k}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{MQ_i}\|} \right) ds_M$$

$$KZ_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \int_{T_{j,k} \cup \tilde{T}_{j,k}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{MQ_i}\|} \right) ds_M$$

On peut écrire

$$KX_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \left( \int_{T_{j,k}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{MQ_i}\|} \right) ds_M + \int_{T_{j,k}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{M\tilde{Q}_i}\|} \right) ds_M \right)$$

$$KZ_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \left( \int_{T_{j,k}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{MQ_i}\|} \right) ds_M - \int_{T_{j,k}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{M\tilde{Q}_i}\|} \right) ds_M \right)$$

Notant $Q_i^1 = Q_i$, $Q_i^2 = \tilde{Q}_i$, on écrira en abrégé

$$KX_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \left( QX^1_{i,j,k} + QX^2_{i,j,k} \right)$$

$$KZ_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \left( QZ^1_{i,j,k} - QZ^2_{i,j,k} \right)$$

Les formules de l'Annexe AN 2 montrent que les $QX^2_{i,j,k}$ et $QZ^2_{i,j,k}$ s'expriment à l'aide de coefficients $CV^n_{i,j,k,l,m}$ qui se déduisent facilement des $CP^2_{i,j,k,l,m}$ précédents; les calculs seront donc menés de front.

d) Sous-programme de calcul

Le calcul des coefficients précédents étant très long , on a été amené à l'étudier tout particulièrement en évitant tout calcul redondant et en utilisant le plus possible la symétrie axiale du problème et la symétrie de la matrice $(\alpha_{ij})$.

Si l'on pose, en particulier,

$$N'_j = PE\left(\frac{N_j}{2}\right) + 1 \qquad \text{(PE = partie entière)}$$

il suffit de calculer les

$$LP_{i,j,k}\ ,\ QX^n_{i,j,k} \quad \text{et} \quad QZ^n_{i,j,k} \quad \text{pour} \quad k = 1, N'_j$$

On constate, en effet, que

$$LP_{i,j,k} = LP_{i,j,N_j+2-k}$$

$$QX^n_{i,j,k} = QX^n_{i,j,N_j+2-k}$$

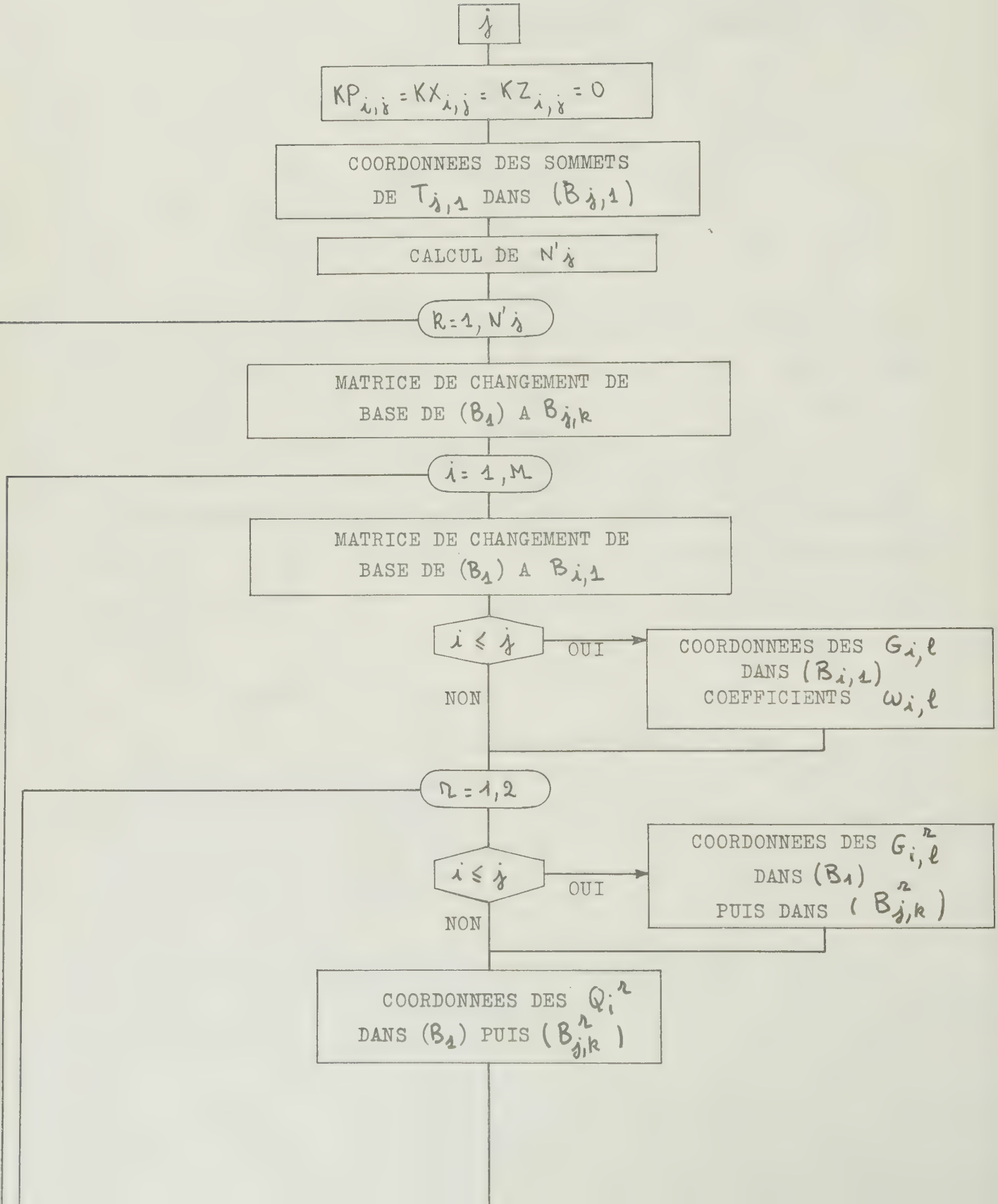
$$QZ^n_{i,j,k} = QZ^n_{i,j,N_j+2-k}$$

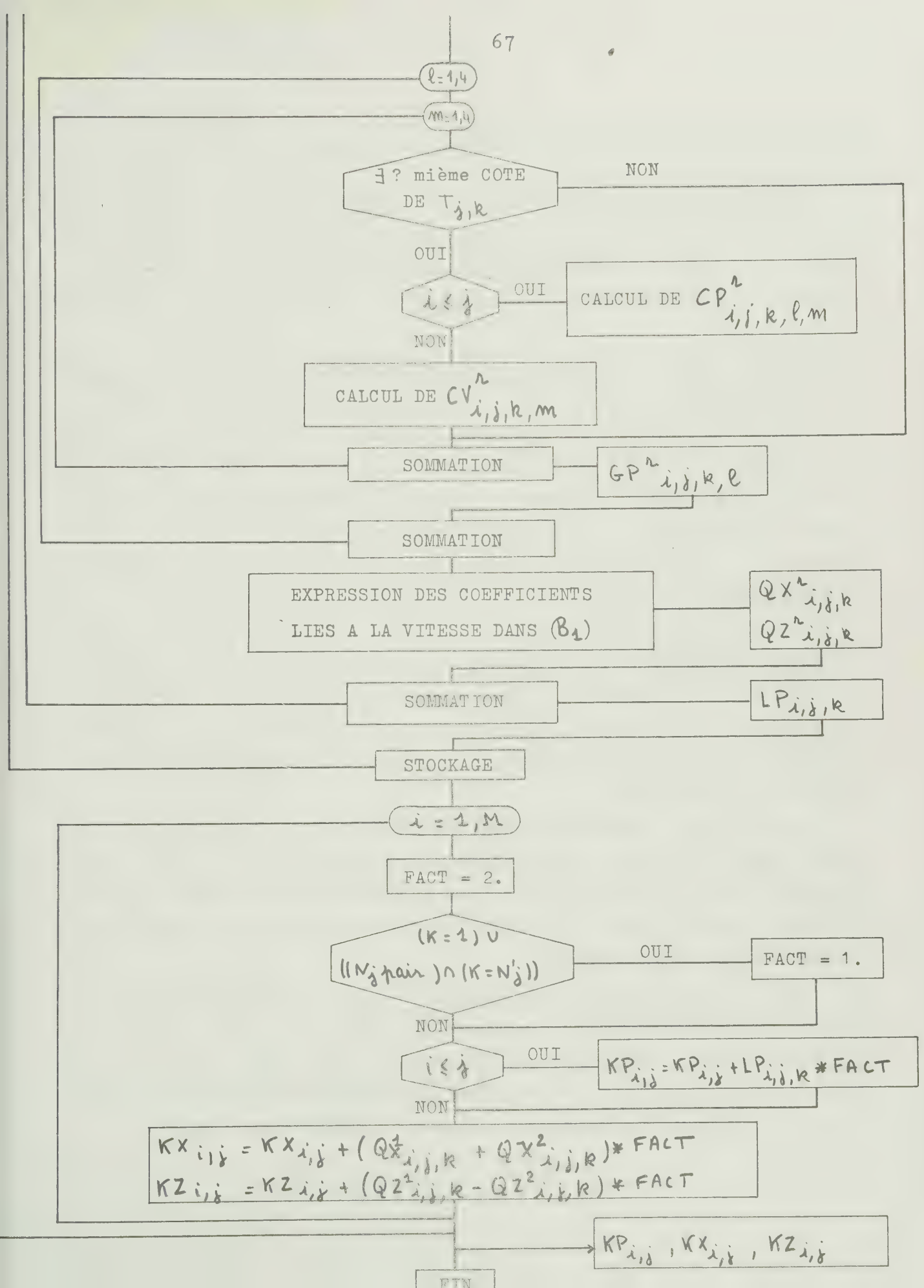
pour $k = 2, \begin{matrix} N_j/2 & \text{si } N_j \text{ est pair} \\ (N_j+1)/2 & \text{si } N_j \text{ est impair} \end{matrix}$

On notera $(B_1)$, la base fixe dans laquelle $(\eta_j = 0)$ est l'équation de la paroi, et l'axe des $\eta_j$ axe de symétrie de la bulle. $(B_{j,k})$ est la base liée au trapèze $T_{j,k}$, dans laquelle le plan $(\eta_j = 0)$ est le plan de $T_{j,k}$.

Le sous-programme de calcul "CALT" des coefficients calcule en un passage, pour $j$ fixé, les $KP_{i,j}$, $KX_{i,j}$, $KZ_{i,j}$ $i = 1, M$. Le programme principal appelle donc le sous-programme "CALT" $M$ fois au cours d'une itération.

e) Organigramme




ℓ=1,4
m=1,4
∃ ? mième COTE DE $T_{j,k}$
NON
OUI
$i \leq j$
OUI
CALCUL DE $CP^2_{i,j,k,\ell,m}$
NON
CALCUL DE $CV^2_{i,j,k,m}$
SOMMATION
$GP^2_{i,j,k,\ell}$
SOMMATION
EXPRESSION DES COEFFICIENTS LIES A LA VITESSE DANS $(\mathcal{B}_1)$
$QX^2_{i,j,k}$
$QZ^2_{i,j,k}$
SOMMATION
$LP_{i,j,k}$
STOCKAGE
i = 1,M
FACT = 2.
(K = 1) ∪ ((Nj pair) ∩ (K = N'j))
OUI
FACT = 1.
NON
$i \leq j$
OUI
$KP_{i,j} = KP_{i,j} + LP_{i,j,k} * FACT$
NON
$KX_{i,j} = KX_{i,j} + (QX^1_{i,j,k} + QX^2_{i,j,k}) * FACT$
$KZ_{i,j} = KZ_{i,j} + (QZ^1_{i,j,k} - QZ^2_{i,j,k}) * FACT$
$KP_{i,j}$ , $KX_{i,j}$ , $KZ_{i,j}$
FIN

4.1.3 - L'interpolation par splines

a) Nécessité d'une méthode d'interpolation

Une difficulté essentielle du problème consiste à suivre avec précision une surface soumise à d'importantes déformations. La symétrie axiale permet de se ramener à l'étude d'une courbe : la demi-méridienne de la bulle.

L'ordinateur ne permettant de manipuler qu'un nombre fini de quantités, la méridienne de la bulle n'est connue qu'en un nombre fini de points $P_i$ $i=1, M+1$ ; la rotation du segment $P_i P_{i+1}$ autour de l'axe $Oz$ engendre le cône $C_i$ utilisé dans la discrétisation de $\partial\Omega$ . La surface de la bulle étant considérée comme une surface matérielle, son déplacement est connu par l'intermédiaire des points $Q_i$ , centres de gravité des trapèzes $T_{i,1}$ . On voit donc déjà la nécessité de déduire les déplacements des $P_i$ de ceux des $Q_i$ .

Par ailleurs, les points matériels $Q_i$ , que l'on suit dans leur mouvement ne peuvent être conservés tout au long du phénomène. En effet, la région du jet rentrant que l'on cherche à connaître avec le maximum de précision ne correspond qu'à une portion initiale très restreinte de la méridienne; la densité de points $Q_i$ dans cette région serait donc rapidement trop faible.

Plus encore, la méthode des singularités, et la méthode d'éléments finis associée, qui font passer d'un problème bien posé dans $\mathbb{R}^3$ , à un problème sur une variété de dimension 2, nécessitent une discrétisation de bonne qualité; on est donc obligé de remettre en cause cette discrétisation à chaque pas de temps.

On doit donc disposer d'une méthode permettant d'interpoler des points $O_j$ de la méridienne, à partir des points $P_i$ connus, on sera également amené à calculer les vitesses aux points $O_j$ à partir de celles connues aux points $Q_i$ ; enfin il est nécessaire d'interpoler les conditions aux limites de DIRICHLET le long de la méridienne.

La méthode d'interpolation choisie utilise des fonctions "splines" d'ordre 2 et de degré 3. L'interpolation sur la position des points de la méridienne a été réalisée à l'aide d'une représentation paramétrique de la forme $P_i = (\pi(\tau_i), \pi_3(\tau_i))$; ce sont les fonctions coordonnées qui ont été séparément interpolées à l'aide de splines.

b) Aperçu théorique (cf. LAURENT [6])

L'intérêt des fonctions splines est de fournir, parmi les interpolations raisonnables, celle qui est la plus "lisse". La proposition qui suit précise cette affirmation.

On se donne

$n+2$ points $a, t_1, \ldots, t, b$

$n$ nombres réels $\pi_1, \ldots, \pi_n$

On cherche dans l'ensemble des fonctions réelles $s$ définies sur $[a, b]$, de dérivée première continue, de dérivée seconde $\in L^2[a,b]$ et telles que $s(t_i) = \pi_i \quad i = 1, n$, celle qui minimise $\int_a^b (s''(t))^2 dt$ La valeur de cette fonctionnelle est une mesure du caractère plus ou moins "lisse" de $s$.

On peut alors montrer que la solution de ce problème appartient à l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions réelles définies sur $[a,b]$, telles que

$s_{|[t_i, t_{i+1}]}$ est un polynôme de degré 3

$s_{|[a,t_1]}$ et $s_{|[t_n, b]}$ sont des polynômes de degré 1

$s''$ est continue sur $[a,b]$

Il s'agit donc de trouver $s \in \mathcal{S}$ telle que $s(t_i) = \pi_i$ on montre facilement l'existence et l'unicité de la solution de ce problème.

c) Application pratique

On pose $s''(t_i) = m_i \quad i = 1, n$

$$h_i = t_i - t_{i-1} \quad i = 2, n$$

Dans chaque intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ , $s''$ est une fonction affine; on aura donc

$$s''(t) = m_{i-1}\frac{t_i - t}{l_i} + m_i\frac{t - t_{i-1}}{l_i} \qquad t \in [t_{i-1}, t_i]$$

qu'on intègre deux fois

$$s(t) = \frac{m_{i-1}}{6l_i}(t_i - t)^3 + \frac{m_i}{6l_i}(t - t_{i-1})^3 + D_i t + E_i \qquad t \in [t_{i-1}, t_i]$$

Les coefficients $D_i$ et $E_i$ s'obtiennent en exprimant la condition d'interpolation

$$s(t_{i-1}) = \pi_{i-1} \qquad s(t_i) = \pi_i$$

On obtient

$$s(t) = \frac{m_{i-1}}{6l_i}(t_i - t)^3 + \frac{m_i}{6l_i}(t - t_{i-1})^3 + \left(\frac{\pi_i}{l_i} - \frac{m_i l_i}{6}\right)(t - t_{i-1})$$

$$+ \left(\frac{m_{i-1} l_i}{6} - \frac{\pi_{i-1}}{l_i}\right)(t - t_i) \qquad t \in [t_{i-1}, t_i]$$

Restent à déterminer les $m_i$ $i = 1, n$ ; il suffira d'exprimer la continuité de $s'(t)$ aux points $t_i$ $i = 2, n-1$ et de remarquer que $(s \in \mathcal{S}) \Rightarrow (m_1 = m_n = 0)$. On aboutit à un système linéaire

$$m_{i-1}\frac{l_i}{6} + m_i\frac{l_i + l_{i+1}}{3} + m_{i+1}\frac{l_{i+1}}{6} = \frac{\pi_{i+1} - \pi_i}{l_{i+1}} - \frac{\pi_i - \pi_{i-1}}{l_i}$$

$i = 2, n-1$

Sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\ell_2+\ell_3}{6} & \frac{\ell_3}{6} & & & 0 \\ \frac{\ell_3}{6} & \frac{\ell_3+\ell_4}{6} & \frac{\ell_4}{6} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{\ell_{n-1}}{6} \\ 0 & & & \frac{\ell_{n-1}}{6} & \frac{\ell_{n-1}+\ell_n}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi_3-\pi_2}{\ell_3} - \frac{\pi_2-\pi_1}{\ell_2} \\ \vdots \\ \frac{\pi_n-\pi_{n-1}}{\ell_n} - \frac{\pi_{n-1}-\pi_{n-2}}{\ell_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Ce système, de matrice tridiagonale, est résolu par une méthode classique de factorisation $\mathbb{L}\,\mathbb{U}$.

## 4.2 - DISCRETISATION AUTOMATIQUE

### 4.2.1 - Généralités

a) Données du problème

La symétrie axiale de la bulle ramène le problème de l'approximation de la surface $\partial\Omega$ par des cônes $C_i$ , à celui de la méridienne par une ligne brisée; soit $P_i$ les sommets de cette ligne , $i = 1, M+1$

On a déjà indiqué que la méthode d'éléments finis utilisée est très sensible à la qualité de la discrétisation de la méridienne. VINAS-ESPIN, dans la référence [13] , indique que le rapport de deux segments consécutifs doit être compris entre 3/2 et 2/3 et que l'angle formé par ces deux segments doit être compris entre $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

Il est donc indispensable de remettre en question, au moins périodiquement, la répartition des points $P_i$ sur la méridienne.

b) Présentation de la méthode utilisée

La courbe à discrétiser $S$ est fixée, ainsi que le nombre de points $M + 1$ de discrétisation; leurs abscisses curvilignes sont les $\lambda_i$ , $i = 1, M + 1$; les points $P_1$ et $P_{M+1}$ situés aux extrémités de la courbe sont fixes.

On note $\lambda(P)$ l'abscisse curviligne du point $P$ et $P(\lambda)$ le point d'abscisse curviligne $\lambda$ ; on pose

$$t_i = \lambda_{i+1} \qquad i = 1, M-1$$

Le problème a été considéré comme un problème d'optimisation avec contraintes.

Les variables sont les $t_i$ $\quad i = 1, M-1$

Le domaine est formé des vecteurs $T = (t_i) \in \mathbb{R}^{M-1}$ tels que

$$\Delta_{i+1} - \Delta_i > 0 \qquad i = 1, M$$

$$\| \overrightarrow{P_{(\Delta_{i+1})} P_{(\Delta_i)}} \| > \ell \quad \text{fixé} \qquad i = 1, M$$

il n'est pas, en général, convexe.

On définit les notations suivantes :

$$\pi_i = \operatorname{Sup} \left( \frac{\| \overrightarrow{P_{i+1} P_i} \|}{\| \overrightarrow{P_i P_{i-1}} \|}, \frac{\| \overrightarrow{P_i P_{i-1}} \|}{\| \overrightarrow{P_{i+1} P_i} \|} \right) \qquad i = 2, M$$

$$\theta_i = | ( \overrightarrow{P_{i-1} P_i}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}} ) | \qquad \theta_i \in [0, \pi]$$

Le coût attaché aux points $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$ sera alors

$$j_i (\Delta_{i-1}, \Delta_i, \Delta_{i+1}) = \operatorname{Sup}(0, \pi_i - 3/2) + \operatorname{Sup}(0, 2\pi/3 - \theta_i)$$

La fonction de coût globale $J$ est une combinaison convexe des $j_i$ $i = 2, M$

On doit toutefois remarquer qu'un tel problème n'entre pas dans le cadre habituel des problèmes convexes et qu'on ne saurait, ni démontrer l'unicité de la solution, ni garantir la convergence des algorithmes classiques vers une de ces solutions.

C'est pourquoi il a été nécessaire de construire un prédicteur de bonne qualité, par des méthodes heuristiques, afin que le minimum local de la fonction de coût au voisinage de ce prédicteur puisse être considéré comme satisfaisant.

Par ailleurs, le calcul du gradient d'une fonction telle que $J$ est pratiquement impossible; on a donc utilisé une méthode directe d'optimisation : la méthode de HOOKE et JEEVES.

4.2.2 - Construction d'un prédicteur

a) Données

On se donne les points $\tilde{P}_i$ $i = 1, \tilde{M}+1$, qui définissent la méridienne de la bulle; la méthode d'interpolation par "splines" permet de disposer des coordonnées d'un point quelconque de la méridienne dont on connaît l'abscisse curviligne.

On se donne une fonction $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui représente l'adaptation souhaitée de la discrétisation à la courbure de $S$ : $h$ fait correspondre à chaque rayon de courbure, la longueur optimale du segment de discrétisation voisin.

On se donne la raison $\hat{q}$ d'une progression géométrique; $\hat{q} \in [1, 3/2]$ et représente l'optimum du rapport de deux segments consécutifs de la discrétisation; on fournit également $\chi \in \mathbb{R}^+$, tout maximum relatif de courbure inférieur à $\chi$ en valeur absolue ne sera pas pris en compte.

b) Construction du prédicteur autour des points à forte courbure

La première étape consiste à calculer la courbure de la méridienne aux points d'abscisses curvilignes $\gamma_k$ $k = 1,5\tilde{M}+1$

$$\gamma_k = \Delta_m + (k-1-5(m-1))(\Delta_{m+1}-\Delta_m)/5$$

$$k \in [5(m-1)+1, 5m] \quad m = 1, \tilde{M}$$

$$\gamma_{5\tilde{M}+1} = \Delta_{\tilde{M}+1}$$

On a donc une connaissance précise de l'évolution de la courbure le long de $S$. On recherche alors les maxima de courbure relatifs aux points $P(\gamma_k)$, on ne garde que ceux dont la valeur absolue est supérieure à $\chi$ ; on obtient donc des maxima de courbure $\chi_i$ aux points d'abscisses curvilignes $\zeta_i$ $i = 1, N+1$ ; on a posé

$$\zeta_1 = \Delta_1 \qquad \zeta_{NH} = \Delta_{\tilde{M}+1}$$

On peut alors construire le prédicteur au voisinage des $\zeta_i$ ; on pose

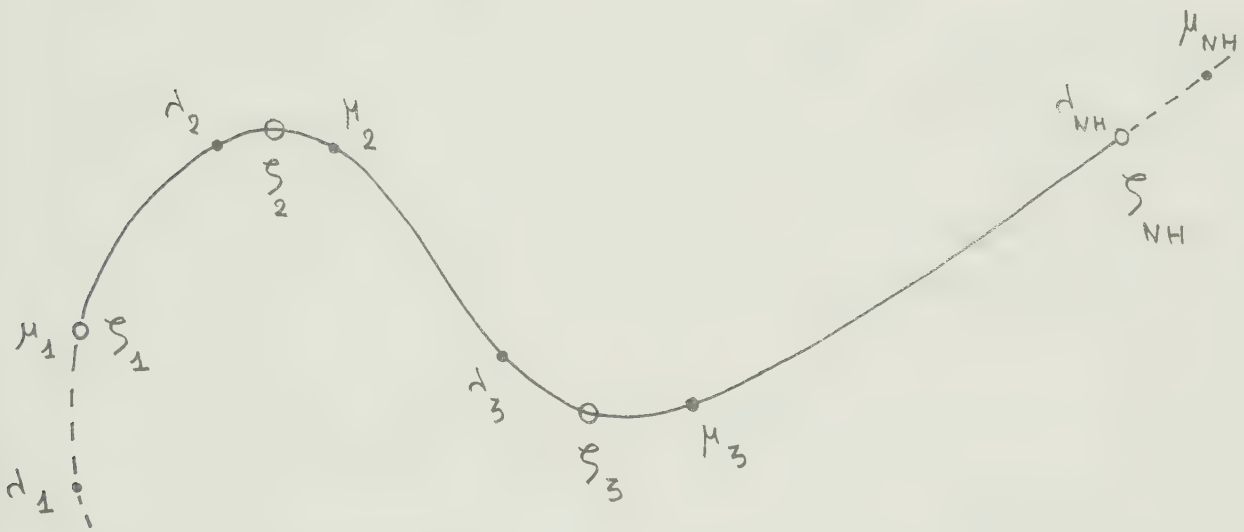
$$\lambda_i = \zeta_i - h(\chi_i) \qquad i = 2, NH-1$$

$$\mu_i = \zeta_i + h(\chi_i)$$

$$\lambda_1 = s_1 - 2h(\chi_1) \qquad \lambda_{NH} = s_{\tilde{M}+1}$$

$$\mu_1 = s_1 \qquad \mu_{NH} = s_{\tilde{M}+1} + 2h(\chi_{NH})$$

Le segment $P(\lambda_i)\ P(\mu_i)$ est considéré comme appartenant à la discrétisation au voisinage de $P(\zeta_i)$.




c) Construction de la discrétisation entre $\lambda_i$ et $\mu_{i+1}$

Le premier et le dernier segment de cette discrétisation viennent d'être déterminés, il s'agit respectivement de $P(\lambda_i)\ P(\mu_i)$ et $P(\lambda_{i+1})\ P(\mu_{i+1})$. On cherche un raccord "raisonnable" entre ces deux éléments de discrétisation.

On veut déterminer $L_i \in \mathbb{N}$ et une suite $\nu^i_j$ $j = 1, L_i$ tels que $\nu^i_1 = d_i$ $\nu^i_{L_i} = \mu_{i+1}$ . On cherchera deux entiers $\Gamma$ et $\Delta$ et deux suites réelles $(\eta_j)$ $j = 1, \Gamma$ et $(\psi_k)$ $k = 1, \Delta$ telles que

$$\eta_{j+1} = \hat{q}\,\eta_j \qquad \eta_1 = \mu_i - d_i \tag{4}$$

$$\psi_{k+1} = \frac{1}{\hat{q}}\,\psi_k \qquad \psi_1 = \mu_{i+1} - d_{i+1} \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{\Gamma} \eta_j + \sum_{k=1}^{\Delta} \psi_k \simeq \mu_{i+1} - d_i \tag{6}$$

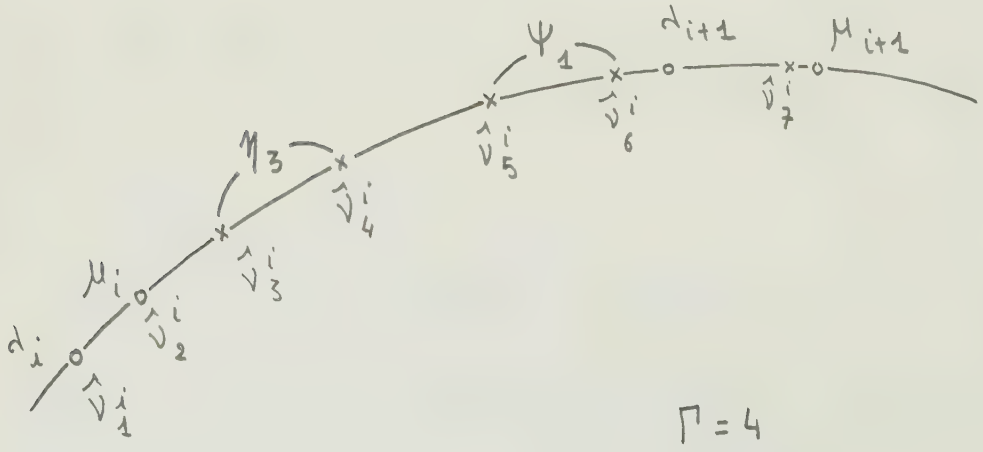
$$\frac{1}{\hat{q}} < \eta_\Gamma / \psi_1 < \hat{q} \tag{7}$$

Un travail arithmétique élémentaire permet de réaliser ces différentes conditions. On posera alors

$$L_i = \Gamma + \Delta + 1$$

$$\hat{\nu}^i_j = \hat{\nu}^i_{j-1} + \eta_{j-1} \qquad j = 2, \Gamma$$

$$\hat{\nu}^i_{j+1} = \hat{\nu}^i_j + \psi_{j-\Gamma} \qquad j = \Gamma + 1, \Gamma + \Delta$$




$\Gamma = 4$

$\Delta = 2$

$L_i = 7$

On a ainsi réparti approximativement les distances de deux points consécutifs $\| \overrightarrow{P(\hat{\nu}^i_{j+1}) \; P(\hat{\nu}^i_j)} \|$ suivant deux progressions géométriques décroissant vers les extrémités de l'intervalle $[P(\lambda_i), P(\mu_{i+1})]$

La condition (7) est une condition de compatibilité entre les deux suites; la condition

$$\sum_{j=1}^{\Gamma} \eta_j + \sum_{k=1}^{\Delta} \psi_k = \mu_{i+1} - \lambda_i$$

est une condition de coïncidence entre $\hat{\nu}^i_{L_i}$ et $\mu_{i+1}$, elle ne peut en général être exactement réalisée.

Cependant, si l'on conserve les nombres $\Gamma$ et $\Delta$ qui viennent d'être déterminés, on peut trouver, par dichotomie $q \simeq \hat{q}$ telle que cette condition soit exactement satisfaite par la suite $\nu^i_j$ construite à partir de $q$.

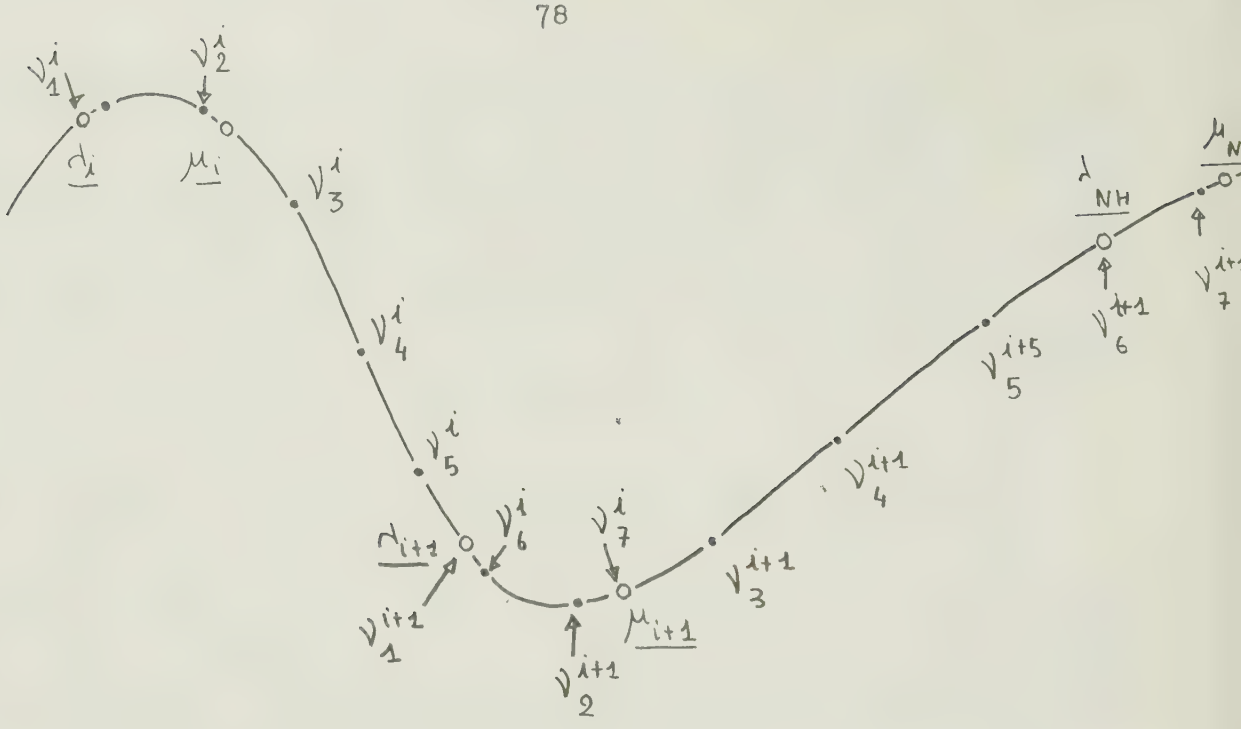
Les choses sont légèrement différentes aux extrémités; par exemple, pour $i = NH$, la condition à satisfaire est la suivante :

$$\sum_{j=1}^{\Gamma} \eta_j + \sum_{k=1}^{\Delta-1} \psi_k = \lambda_{i+1} - \lambda_i$$

elle exprime que le point $\nu^{NH-1}_{L_{NH-1}}$ coïncide avec $\lambda_{NH} = \lambda_{\tilde{M}+1}$

d) Recollement des morceaux

Le prédicteur $(t_i)$ $i = 1, M+1 = \sum_{i=1}^{NH} (L_i - 2)$ est construit en concaténant les $NH - 1$ discrétisations partielles $\nu_{ij}$ $j = 2, L_i - 1$.




La fin de la discrétisation globale est formée, sur le dessin, de

$$\nu_2^i, \nu_3^i, \nu_4^i, \nu_5^i, \nu_6^i, \nu_2^{i+1}, \nu_3^{i+1}, \nu_4^{i+1}, \nu_5^{i+1}, \nu_6^{i+1}$$

4.2.3 - Méthode de HOOKE et JEEVES (voir CEA [1])

a) Notations

Soit $J$ la fonction de coût $\quad J : \mathbb{R}^{M-1} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$T = (\tau_1, \ldots, \tau_{M-1}) \in \mathbb{R}^{M-1}$

$T_0 = (t_1, \ldots, t_{M-1})$

$e_i$ est le ième vecteur de base de $\mathbb{R}^{M-1}$

$\sigma \in \mathbb{R}^+$ est donné.

b) Opérateur de recherche locale

$$RL_\sigma : \mathbb{R}^{M-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{M-1}$$

On définit une suite $(\tilde{T}^i)$ $i = 1, M$ telle que $\tilde{T}^1 = T$

$$\tilde{T}^{i+1} \in \left\{ \tilde{T}^i - \sigma e^i, \tilde{T}^i, \tilde{T}^i + \sigma e_i \right\}$$

$$J(\tilde{T}^{i+1}) = \text{Inf} \left( J(\tilde{T}^i - \sigma e^i), J(\tilde{T}^i), J(\tilde{T}^i + \sigma e^i) \right)$$

En cas d'ambiguïté on prend $\tilde{T}^{i+1} = \tilde{T}^i$

On pose alors $RL_\sigma(T) = \tilde{T}^M$ ; on aura $J(\tilde{T}^M) \leq J(T)$

c) Schéma

Un schéma est une application $SC_\sigma : \mathbb{R}^{M-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{M-1}$

On se donne $T$ et $\sigma$, on construit une suite $\hat{T}^i$ telle que

$$\hat{T}^1 = T$$

$$\hat{T}^{k+1} = RL_\sigma(2\hat{T}^k - \hat{T}^{k-1}) \text{ si } J(RL_\sigma(2\hat{T}^k - \hat{T}^{k-1})) < J(\hat{T}^k)$$

$$\hat{T}^{k+1} = RL_\sigma(\hat{T}^k) \quad \text{sinon}$$

La suite $(\hat{T}^k)$ se termine si $\hat{T}^{k+1} = \hat{T}^k$ ; on pose alors

$$SC_\sigma(T) = \hat{T}^k$$

d) Méthode globale

La méthode de HOOKE et JEEVES utilise une suite de schémas; on pose

$$T^1 = SC_\sigma(T^0)$$

$$\vdots$$

$$T^m = SC_{\sigma/2^{m-1}}(T^{m-1})$$

On peut montrer la convergence de cette méthode (CEA [1]) sous les hypothèses suivantes :

$J$ et $\frac{\partial J}{\partial t_i}$ sont continues

$J$ est strictement convexe

$J(T) \to \infty$, quand $\|T\| \to \infty$

4.2.4 - Mise en oeuvre

a) Choix de la fonction de coût

Le caractère non convexe du problème a conduit à opérer deux minimisations successives avec des fonctions de coût différentes; par ailleurs on a introduit un coût supplémentaire de pénalisation destiné à tenir compte des contraintes. Une méthode de pénalisation au sens strict a été envisagée, mais n'a pas donné satisfaction.

Le coût de pénalisation peut se noter

$$CP = \frac{1}{\varepsilon} \sup_{i=1,M} \mathcal{P}_i \qquad \varepsilon = 10^{-4}$$

où

$$\mathcal{P}_i = \sup(0, \ell - \|P_{i+1}P_i\|) + \sup(0, s_i - s_{i+1})$$

$\ell$ est un réel positif, donné, il représente la longueur minimum admise pour un segment de la discrétisation.

La première optimisation est de caractère local : on améliore uniquement les points les plus désastreux du prédicteur; à cet effet on a posé

$$J_1 = CP + \sup_{i=2,M} \theta_i + \sup_{i=2,M} \pi_i$$

La seconde optimisation est globale, on améliore la discrétisation en tout point où c'est possible, on pose

$$J_2 = CP + \sum_{i=2}^{M} \theta_i + \sum_{i=2}^{M} \pi_i$$

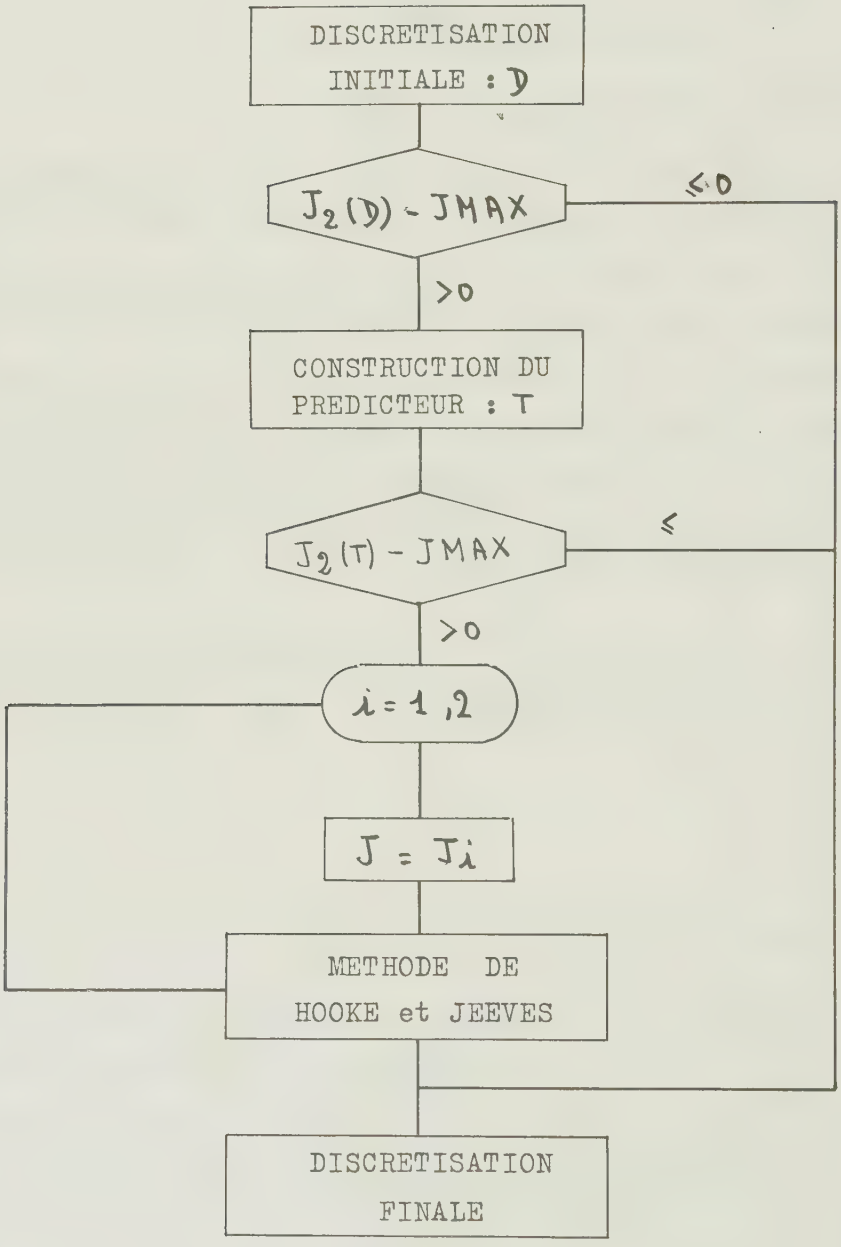
b) Calcul de la fonction de coût

Tous ces calculs sont assez longs et on peut remarquer qu'une recherche locale avec l'opérateur RL conduit à opérer $2M - 1$ évaluations de $J$, mais que d'un élément au suivant de la suite $\tilde{\tau}^i$ seule une coordonnée change; soit par exemple la $i$ ème, seuls changeront donc, en réalité, les

$$\pi_{i-1}, \theta_{i-1}, \varphi_{i-1}$$
$$\pi_i, \theta_i, \varphi_i$$
$$\pi_{i+1}, \theta_{i+1}$$

La mise en oeuvre informatique de cette remarque est assez complexe, mais économise beaucoup de temps.

. Organigramme



La méthode paraît finalement assez sûre, bien qu'heuristique. Les paramètres les plus difficiles à fixer au départ sont :

$\ell$ : longueur minimum

$\chi$ : minimum des maxima de courbure pris en compte

ils dépendent, en effet, du type de courbe qu'on traite.

Le calcul est assez long : 3 secondes de temps C.P.U. sur UNIVAC 1108, pour une courbe un peu "tordue" et une trentaine de points de discrétisation.

La figure (12) montre un exemple de discrétisation obtenue lors du "collapse" d'une bulle au voisinage d'une surface libre.

# CHAPITRE 5

# RESULTATS

5.1 - ADIMENSIONNALISATION

5.2 - INFLUENCE DE LA PAROI

Bulle "collapsant" en présence d'une paroi

Bulle "collapsant" en présence d'une surface libre

5.3 - PRESENCE D'UN GAZ SEC

5.4 - AMELIORATIONS ET EXTENSIONS

Point de vue numérique

Point de vue physique

## 5.1 - ADIMENSIONNALISATION

On définit les notations suivantes :

$R_I$ : rayon de la bulle à $t = 0$

$D$ : distance du centre de la bulle à la paroi à $t = 0$

$\mathcal{V}(t)$: volume de la bulle

$R(t)$: rayon de la bulle sphérique "équivalente"

$$R(t) = \left( \frac{3\mathcal{V}(t)}{4\pi} \right)^{1/3}$$

$$\delta p = \Delta p - p_0$$

On utilise les variables adimensionnelles suivantes :

$$D^* = \frac{D}{R_I} \qquad R^* = \frac{R}{R_I} \qquad v^* = \frac{v}{\sqrt{\delta p / \rho}}$$

$$\phi^* = \frac{\phi}{R_I \sqrt{\delta p / \rho}} \qquad p^* = \frac{p}{\delta p} \qquad t^* = \frac{t}{R_I \sqrt{\rho / \delta p}}$$

La suite de ce chapitre fera référence aux seules variables adimensionnelles.

La notion de rayon de bulle sphérique équivalente a été introduite afin de permettre la comparaison avec les résultats analytiques de l'analyse de RAYLEIGH

## 5.2 - INFLUENCE DE LA PAROI

Trois distances ont été utilisées pour l'ensemble des simulations; on y fera désormais référence comme au cas "proche" ($D^* = 1,05$), au cas "intermédiaire" ($D^* = 1,5$) et au cas "éloigné" ($D^* = 2$).

### 5.2.1 - Bulle "collapsant" en présence d'une paroi

Deux simulations ont été réalisées; la première correspond au cas "intermédiaire" et utilise le schéma (2, (7)), construit à partir du schéma du second ordre en temps; la seconde simulation correspond au cas "proche", des difficultés de stabilité ont conduit à utiliser le schéma du premier ordre en temps pour construire une formule analogue à (2, (7)). Dans ces deux simulations $\omega$ a une valeur voisine de 0,20.

Les aspects qualitatifs du "collapse" sont représentés sur les figures (1) et (2) . On a dessiné les formes successives de la méridienne de la bulle au cours du "collapse" pour les temps adimensionnels indiqués à droite de la figure. Les résultats de toutes les itérations n'ont, bien entendu, pas été indiqués; la bulle "intermédiaire" a nécessité 80 itérations, la bulle "proche" 110.

Les temps de collapse sont peut différents. On peut, par contre, remarquer que la naissance du jet rentrant est beaucoup plus tardive dans le cas de la bulle "intermédiaire"; d'autre part, l'impact du jet rentrant contre la face inférieure de la bulle a lieu à une distance beaucoup plus faible de la paroi dans le cas de la bulle "proche".

Si on compare avec les résultats de PLESSET et CHAPMAN [11] , on s'aperçoit que notre simulation fournit un jet nettement plus étroit.

Du point de vue quantitatif, on a porté sur la figure (3) , la vitesse adimensionnelle à l'extrémité du jet rentrant en fonction du rayon de la bulle sphérique équivalente. On constate tout d'abord l'existence d'une asymptote verticale pour un rayon non nul;

l'explication en est simple : pendant le développement du jet rentrant le volume ne diminue pratiquement plus tandis que la vitesse croît rapidement. On remarque aussi que la courbe correspondant à la bulle sphérique (modèle de RAYLEIGH) semble être la limite des courbes obtenues quand la bulle s'éloigne de la paroi, ce qui est tout à fait logique : le cas sphérique correspond à une bulle infiniment éloignée de la paroi.

Considérons une bulle de rayon initial 1 mm, si on pose $\Delta p = 10^5$ Pa, $\rho = 10^3$ kg/m$^3$; alors le temps de"collapse" est de l'ordre de $10^{-4}$ s, ce qui est en bon accord avec les résultats expérimentaux. La vitesse maximum atteinte, en fin de "collapse" par l'extrémité du jet rentrant est de 200 m/s pour la bulle "intermédiaire", ce qui est tout à fait compatible avec l'expérience. Dans le cas de la bulle "proche" on aboutit à une vitesse de 10 000 m/s ce qui est, par contre, tout à fait irréaliste.

Ce résultat met en cause, à notre avis, la validité du modèle physique simplifié qui a été retenu. A partir d'une certaine vitesse, il devient impossible de négliger la compressibilité du liquide, les phénomènes thermodynamiques à l'interface et le problème d'aérodynamique interne à la bulle.

### 5.2.2 - Bulle "collapsant" en présence d'une surface libre

Deux cas ont été traités : celui de la bulle intermédiaire et celui de la bulle éloignée. Les figures (4) et (5) montrent les différentes étapes du "collapse" de ces deux bulles.

Comparons tout d'abord ces essais à ceux réalisés au voisinage d'une paroi. On constate qu'ici le temps de collapse est plus court, que le centre de gravité de la bulle tend à s'éloigner de la surface libre, alors qu'il tendait à se rapprocher de la paroi, et qu'il existe deux jets rentrants opposés au lieu d'un seul.

Si on compare entre elles les deux simulations, on constate que le jet rentrant inférieur est d'autant plus important qu'on est plus proche de la surface libre; quant aux temps de "collapse" ils sont du même ordre.

La figure (6) , analogue de la figure (3) , nous montre un phénomène particulier : le cas de la bulle "intermédiaire" semble plus proche du cas sphérique que celui de la bulle "éloignée". On peut en avancer l'explication suivante : le développement du jet rentrant inférieur dépend fortement de la proximité de la surface libre, contrairement à celui du jet rentrant supérieur; dans le cas "éloigné" le jet supérieur a eu le temps de se développer avant d'être arrêté par le jet inférieur et le "collapse" est assez semblable à celui au voisinage d'une paroi.

Pour les conditions physiques envisagées dans le paragraphe précédent la vitesse maximum atteinte est de l'ordre de 30 m/s dans le cas "intermédiaire" et de 350 m/s dans le cas "éloigné".

Les photographies présentées après la figure (12) sont dues à CHAHINE [2] ; la première série montre le "collapse" au voisinage d'une paroi, la seconde a été réalisée au voisinage d'une surface libre, on peut constater le faible déplacement de la surface libre et comparer les étapes successives à la figure (4) .

## 5.3 - PRESENCE D'UN GAZ SEC

On présente ici une simulation réalisée dans le cas "proche" pour une bulle contenant un gaz sec, de pression initiale $p^*_0 = 0,1$ .

La figure (7) montre les différentes étapes du "collapse" de cette bulle; les différences avec la figure (2) sont assez faibles. Le "collapse" est plus lent, le jet rentrant apparaît plus tard mais n'est pas inhibé par la présence de gaz et les vitesses finales atteintes sont du même ordre. La figure (8) permet la comparaison de ces "collapses" de bulles proches; il semble paradoxal que le volume minimum atteint soit plus faible en présence d'un gaz sec, c'est en fait l'apparition plus tardive du jet rentrant qui doit être incriminée.

Sur la figure (9) on peut constater à quel point le modèle de RAYLEIGH diffère ici des résultats de la simulation numérique, le jet rentrant apparaît beaucoup trop tôt pour qu'on puisse constater le phénomène de "rebond".

On a, par ailleurs, calculé, au cours du collapse, la pression dans l'écoulement extérieur; les phénomènes constatés sont assez comparables à ceux que permet de prévoir la théorie de RAYLEIGH, on peut en particulier constater l'existence d'un maximum de pression qui se rapproche de la paroi de la bulle au cours du collapse. La figure (10) compare la valeur calculée de ce maximum de pression $p^*_m$ à celui de la théorie de RAYLEIGH, la figure (11) compare les distances $R^*_m$ de ces maximums au centre de gravité de la bulle.

## 5.4 - AMELIORATIONS ET EXTENSIONS

Le programme que nous avons mis au point permet d'effectuer des simulations assez réalistes du phénomène de "collapse"; il comporte cependant des défauts dont nous allons essayer de dresser une liste.

### 5.4.1 - Point de vue numérique

Nous discuterons tout d'abord l'approximation de la méridienne de la bulle. La méthode choisie : approximation par splines des fonctions coordonnées n'est pas optimale, en effet elle ne minimise pas

$$\int_S \mathcal{C}^2(M)\, ds_M$$

où $S$ est la méridienne de la bulle et $C(M)$ la courbure au point $M$. Des méthodes de pseudo-splines non linéaires existent qui permettent de lever cette difficulté; elles n'ont pas été employées uniquement en raison de leur incidence importante sur le temps de calcul.

Par ailleurs, la méthode d'éléments finis employée est relativement peu précise, ce qui ne laisse pas d'être gênant pour un phénomène aussi brutal; il serait donc intéressant d'envisager une méthode d'ordre plus élevé à l'aide d'éléments isoparamétriques assez réguliers.

### 5.4.2 - Point de vue physique

Les hypothèses physiques simples qui ont été prises semblent relativement réalistes dans le cas où le phénomène n'est pas trop brutal ("collapse" d'une bulle suffisamment éloignée). Dans les autres cas, on constate des écarts avec l'expérience, qui ont trait à la vitesse en fin de collapse, trop élevée dans notre simulation, et à l'épaisseur du jet rentrant, trop faible chez nous.

A notre avis, la réalisation d'une simulation plus fidèle nécessiterait d'étudier trois séries de phénomènes : l'importance de la viscosité et de la compressibilité du liquide à l'intérieur du jet rentrant, l'influence des effets thermodynamiques à l'interface, la résolution du problème d'aérodynamique interne à la bulle.

FIGURES

"COLLAPSE" D'UNE BULLE VIDE AU VOISINAGE D'UNE PAROI

1 Cas "intermédiaire"

2 Cas "proche"

3 Comparaison avec le modèle sphérique

"COLLAPSE" D'UNE BULLE VIDE AU VOISINAGE D'UNE SURFACE LIBRE

4 Cas "intermédiaire"

5 Cas "éloigné"

6 Comparaison avec le modèle sphérique

"COLLAPSE" PROCHE D'UNE PAROI AVEC COMPRESSION ADIABATIQUE

7 Formes successives de la méridienne

8 Comparaison avec la bulle vide

9 Comparaison avec le modèle sphérique

10 Maximum de la pression

11 Lieu du maximum de pression

DISCRETISATION AUTOMATIQUE

12 Une méridienne en fin de "collapse" cas de la figure (4)

PHOTOGRAPHIES

"Collapse" au voisinage d'une paroi

"Collapse" au voisinage d'une surface libre

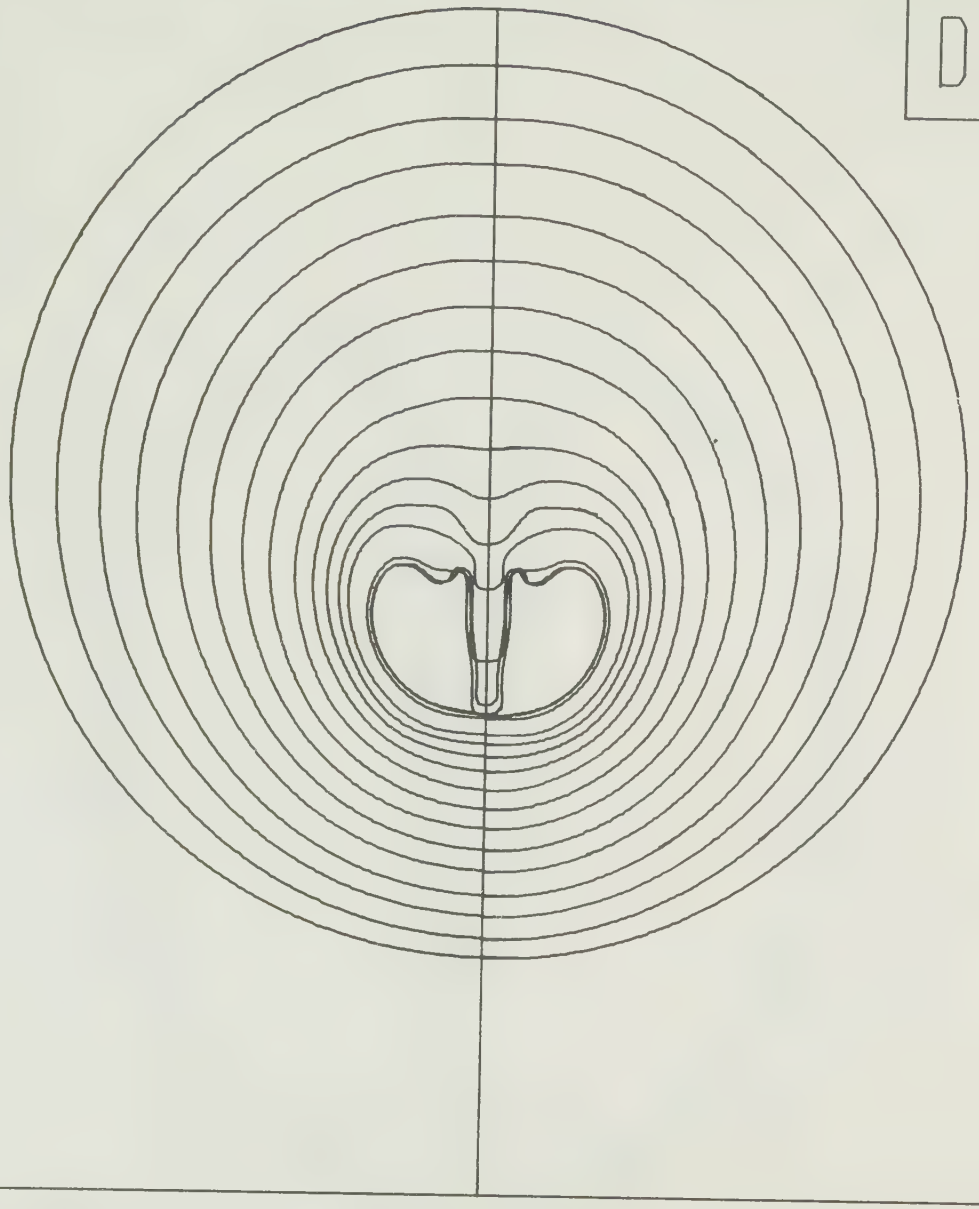

D= 1.50
TEMPS: .0000
TEMPS: .5000
TEMPS: .6626
TEMPS: .7613
TEMPS: .8462
TEMPS: .9007
TEMPS: .9438
TEMPS: .9749
TEMPS: .9988
TEMPS:1.0147
TEMPS:1.0251
TEMPS:1.0327
TEMPS:1.0380
TEMPS:1.0460
TEMPS:1.0474
TEMPS:1.0475
PARØI

FIGURE 1

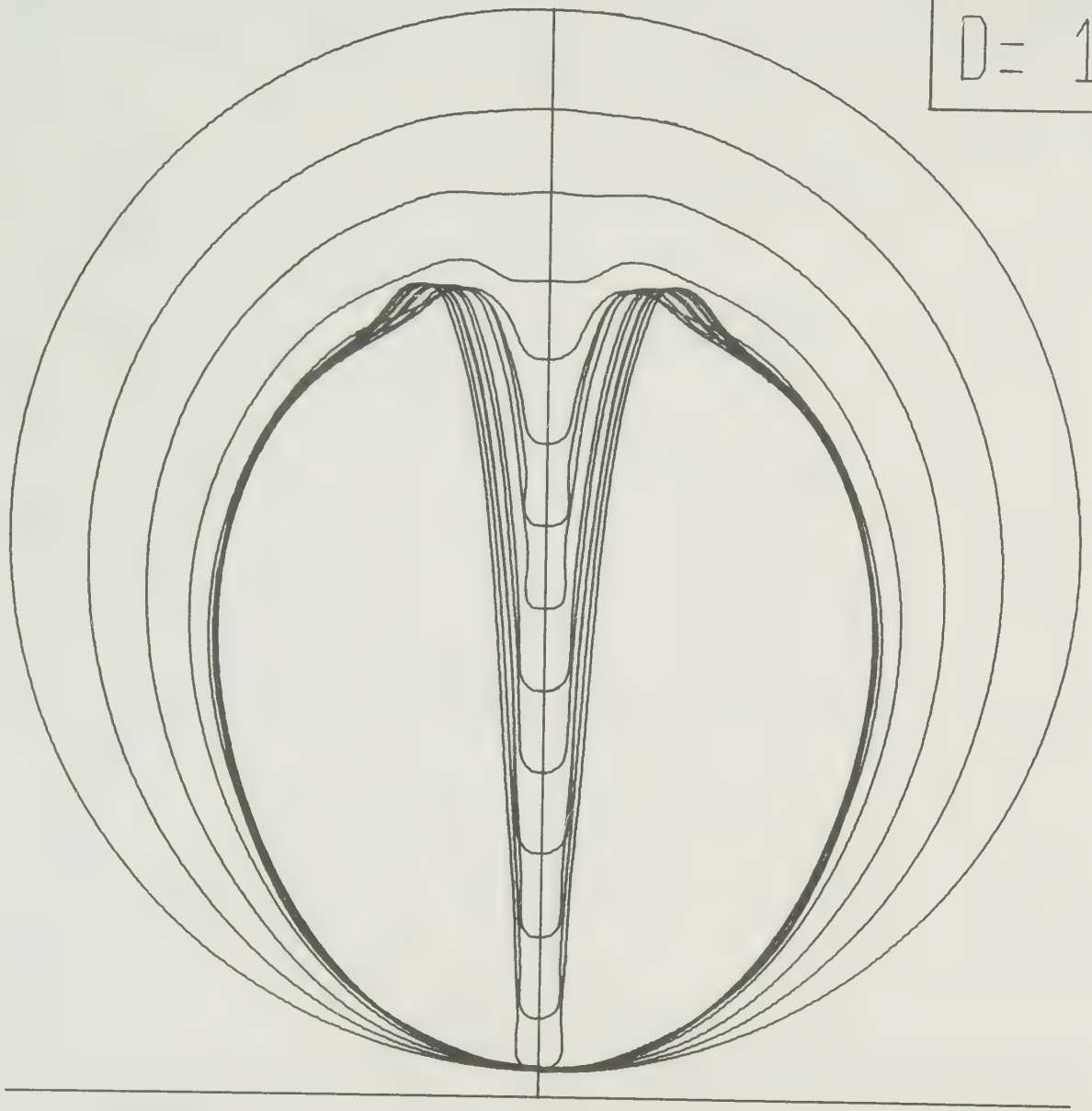

D= 1.05
TEMPS: .0000
TEMPS: .6193
TEMPS: .7874
TEMPS: .8849
TEMPS: .9206
TEMPS: .9294
TEMPS: .9341
TEMPS: .9355
TEMPS: .9359
TEMPS: .9361
TEMPS: .9362
TEMPS: .9362
TEMPS: .9362
TEMPS: .9362
PARØI

FIGURE 2

# BULLES VIDES EN PRESENCE D'UNE PAROI

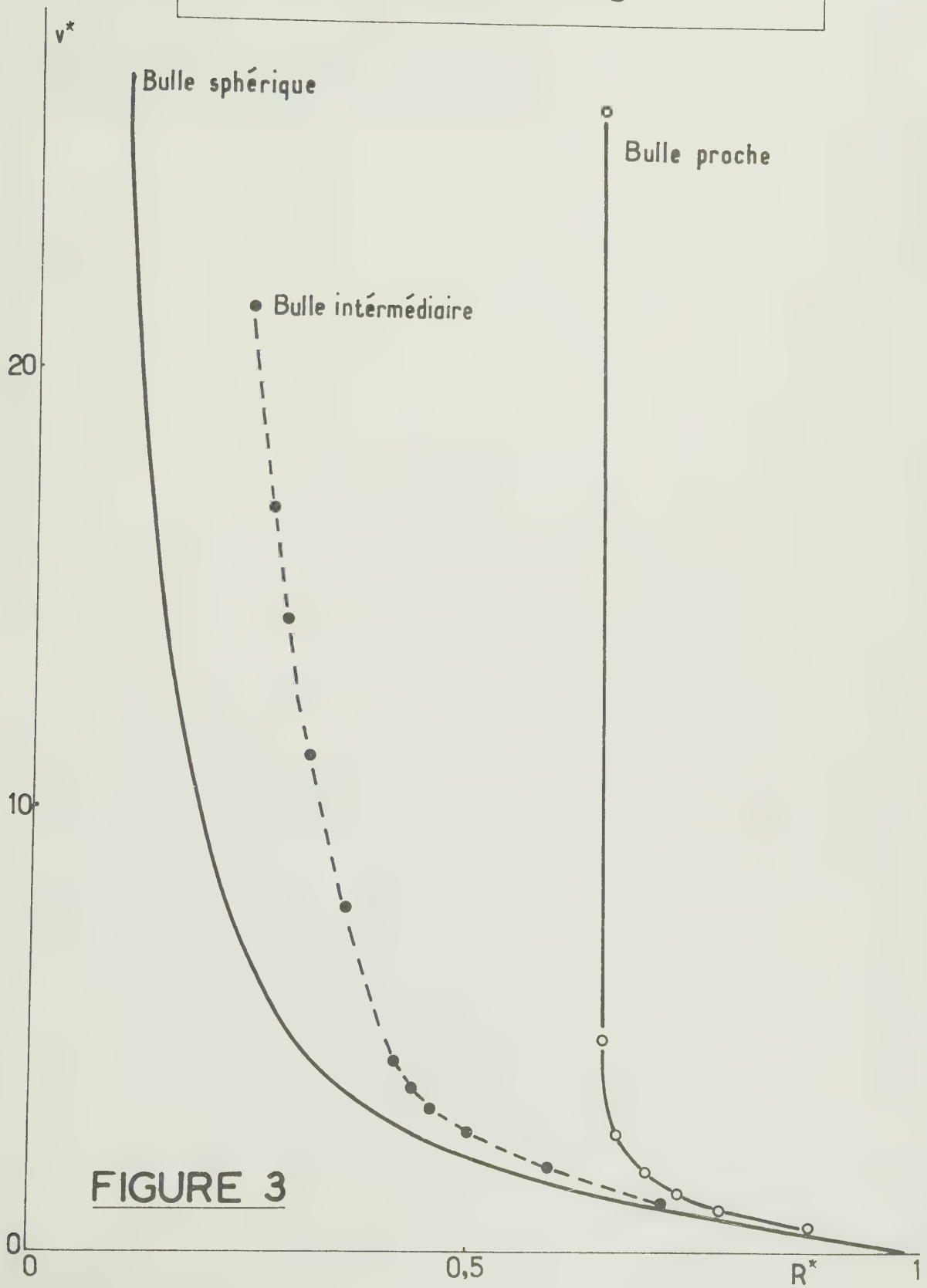
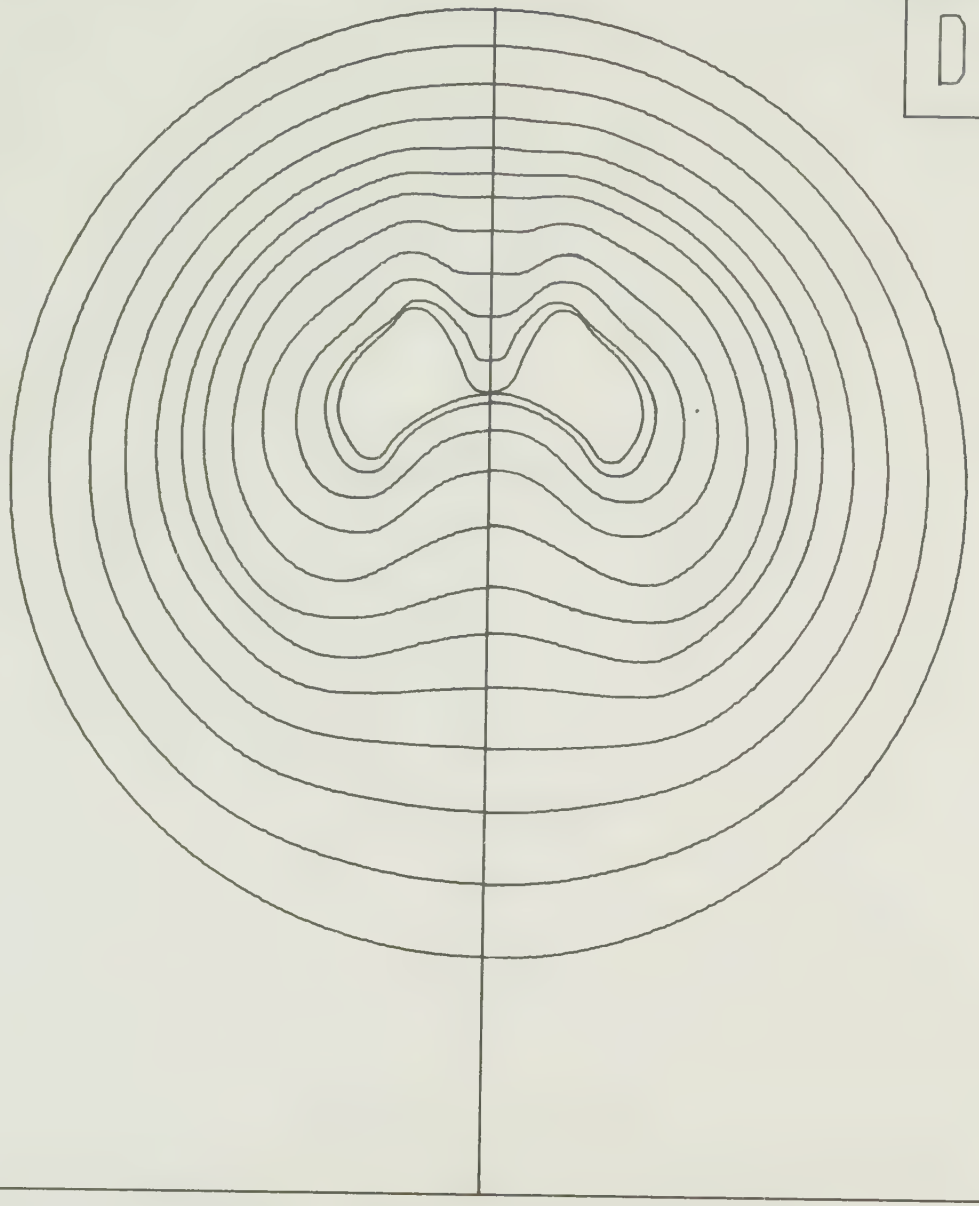



FIGURE 3

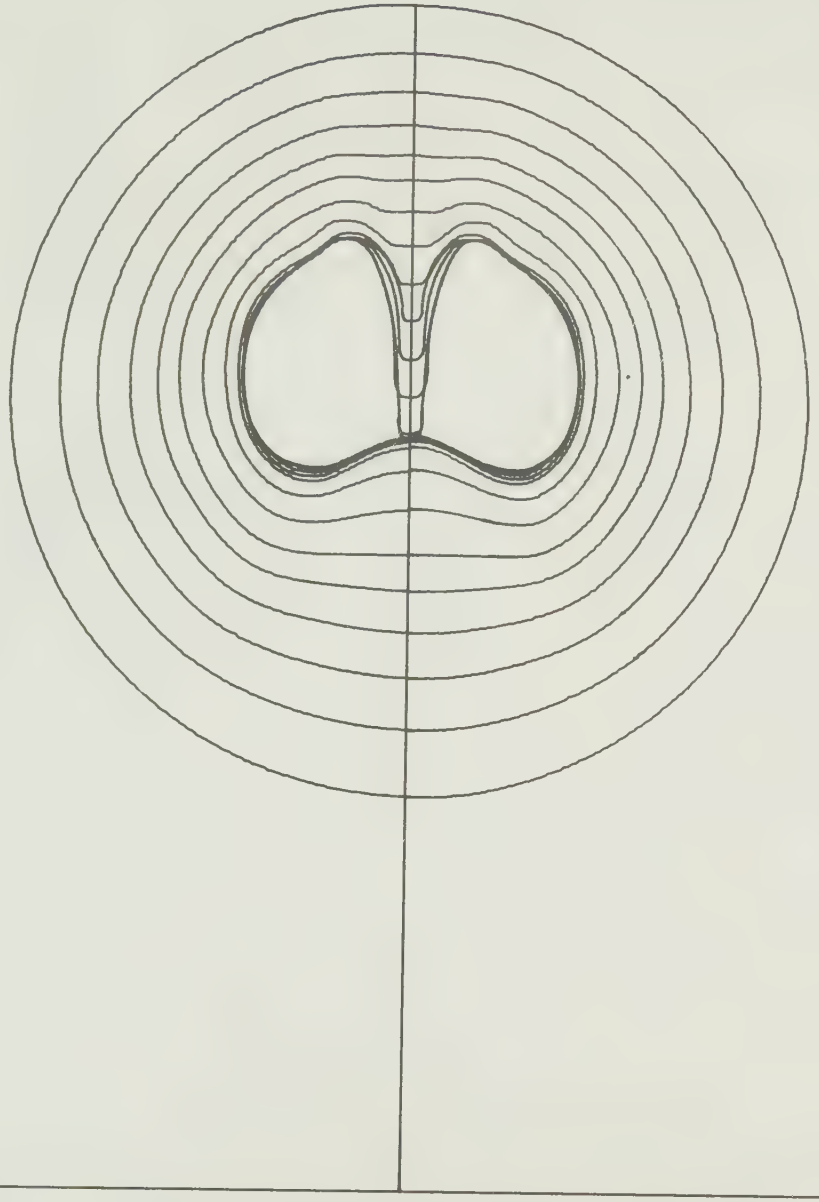


D= 1.50

TEMPS: .0000
TEMPS: .3521
TEMPS: .4860
TEMPS: .5672
TEMPS: .6241
TEMPS: .6633
TEMPS: .6929
TEMPS: .7277
TEMPS: .7602
TEMPS: .7838
TEMPS: .7988
TEMPS: .8036

SURFACE LIBRE

FIGURE 4



D= 2.00

TEMPS: .0000
TEMPS: .4500
TEMPS: .5758
TEMPS: .6523
TEMPS: .7042
TEMPS: .7384
TEMPS: .7709
TEMPS: .7943
TEMPS: .8073
TEMPS: .8111
TEMPS: .8129
TEMPS: .8136
TEMPS: .8139
TEMPS: .8139

SURFACE LIBRE

FIGURE 5

# BULLES VIDES EN PRESENCE D'UNE SURFACE LIBRE

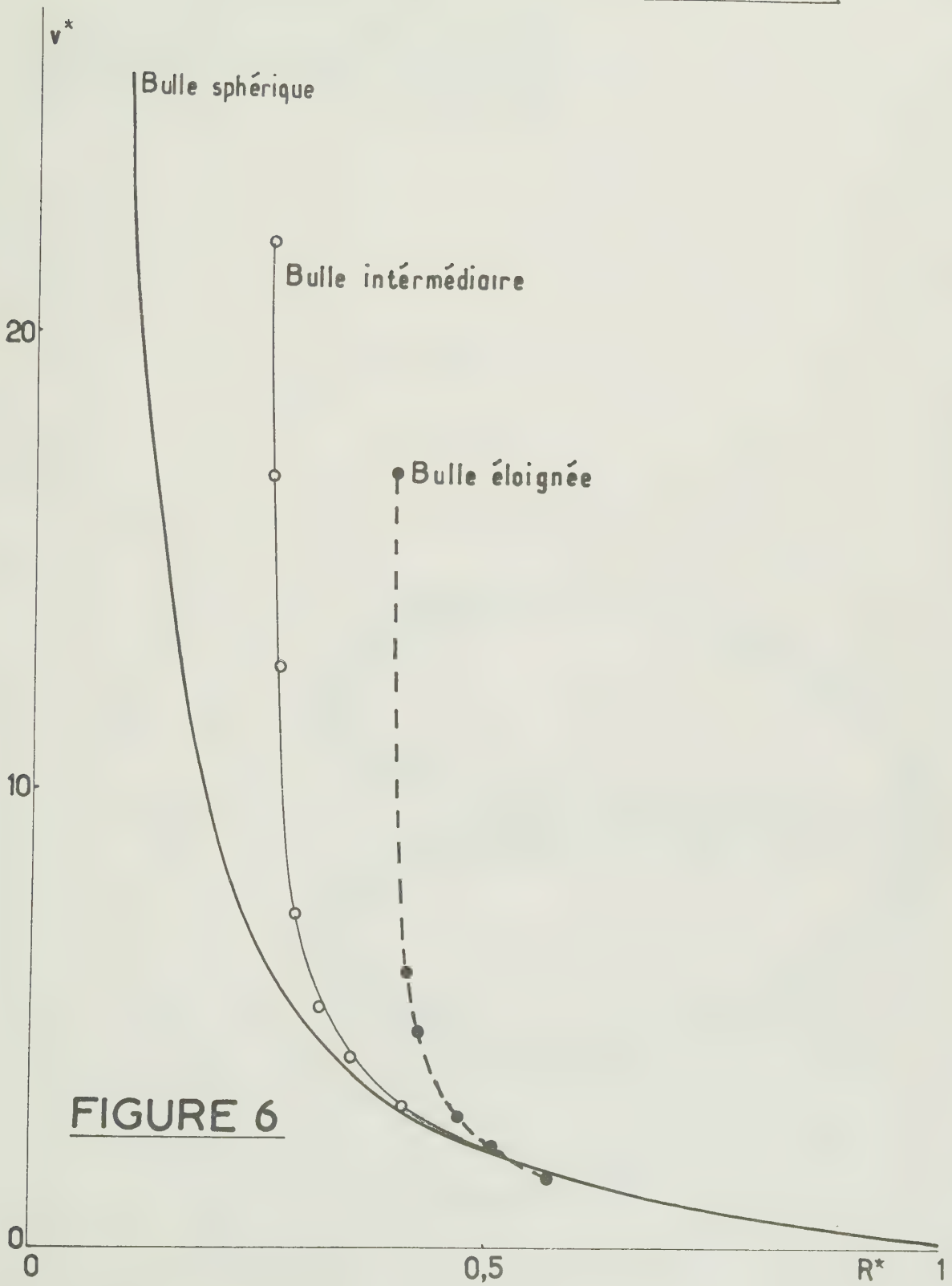



FIGURE 6

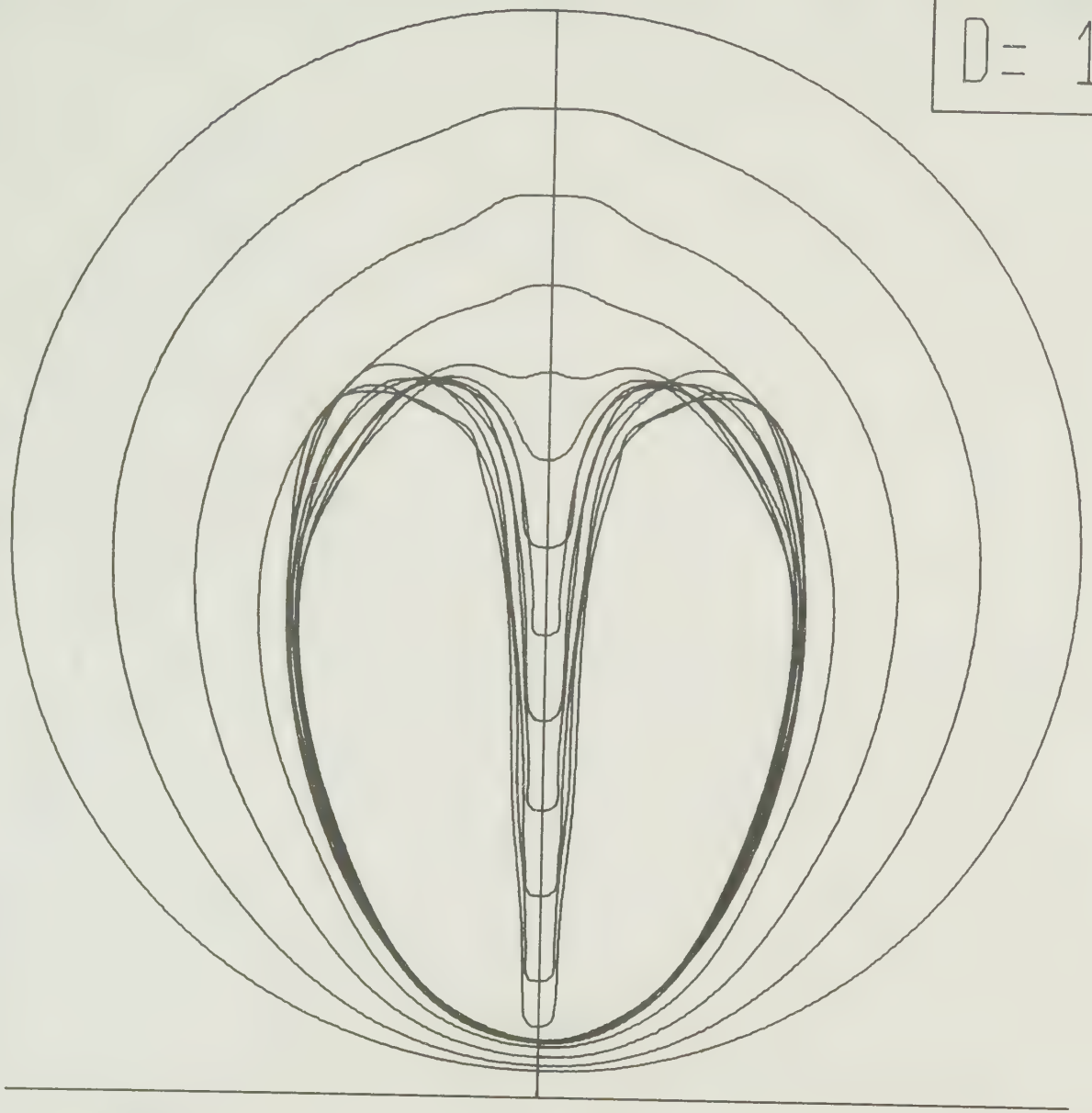

D= 1.05
TEMPS: .0000
TEMPS: .7574
TEMPS: .9626
TEMPS:1.0677
TEMPS:1.1121
TEMPS:1.1222
TEMPS:1.1234
TEMPS:1.1236
TEMPS:1.1237
TEMPS:1.1237
TEMPS:1.1237
TEMPS:1.1237
TEMPS:1.1237
PARØI

FIGURE 7

# BULLES PROCHES EN PRESENCE D'UNE PAROI

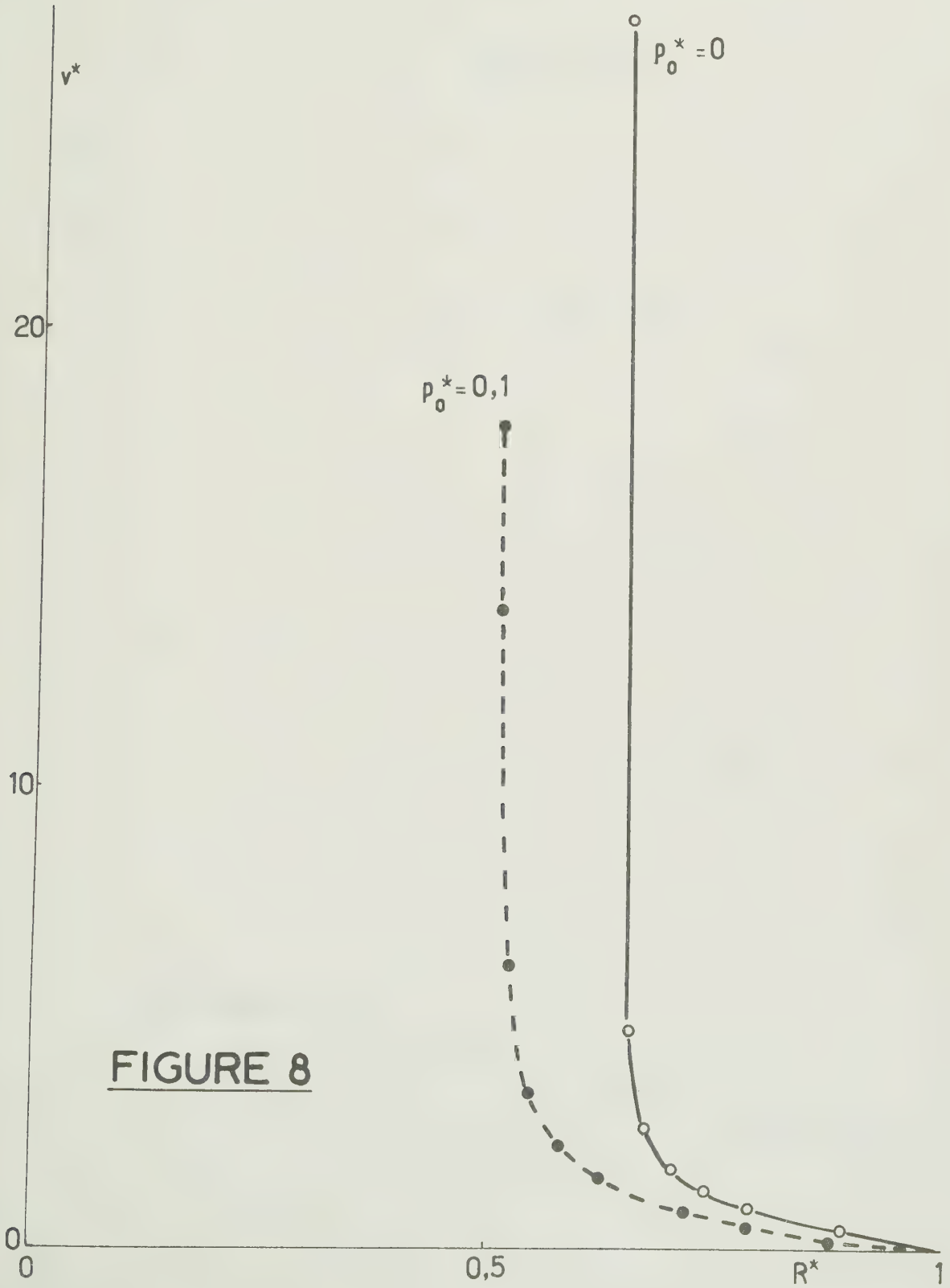



FIGURE 8

# COMPRESSION ADIABATIQUE

$p_o^* = 0,1$

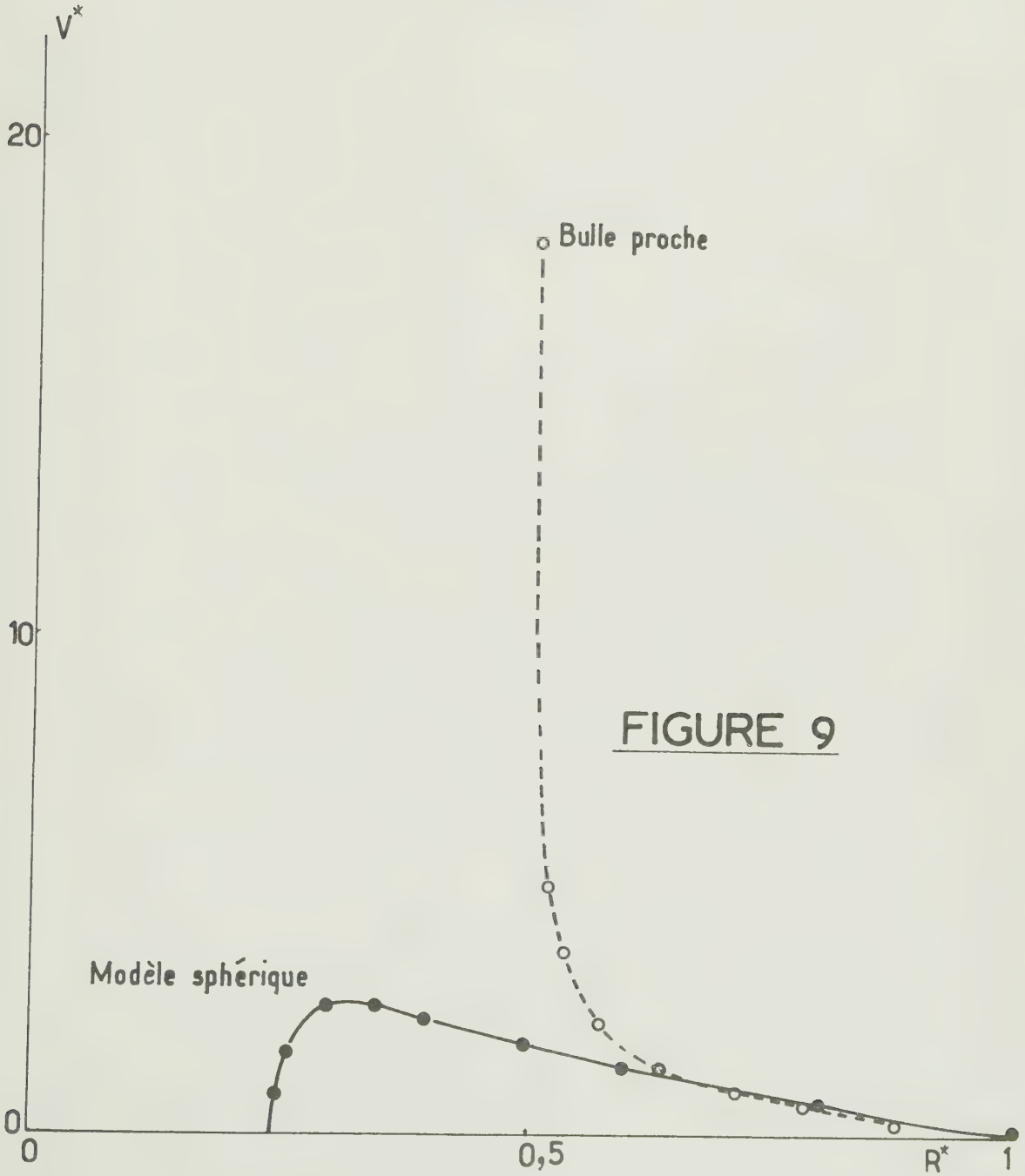



FIGURE 9

# COMPRESSION ADIABATIQUE

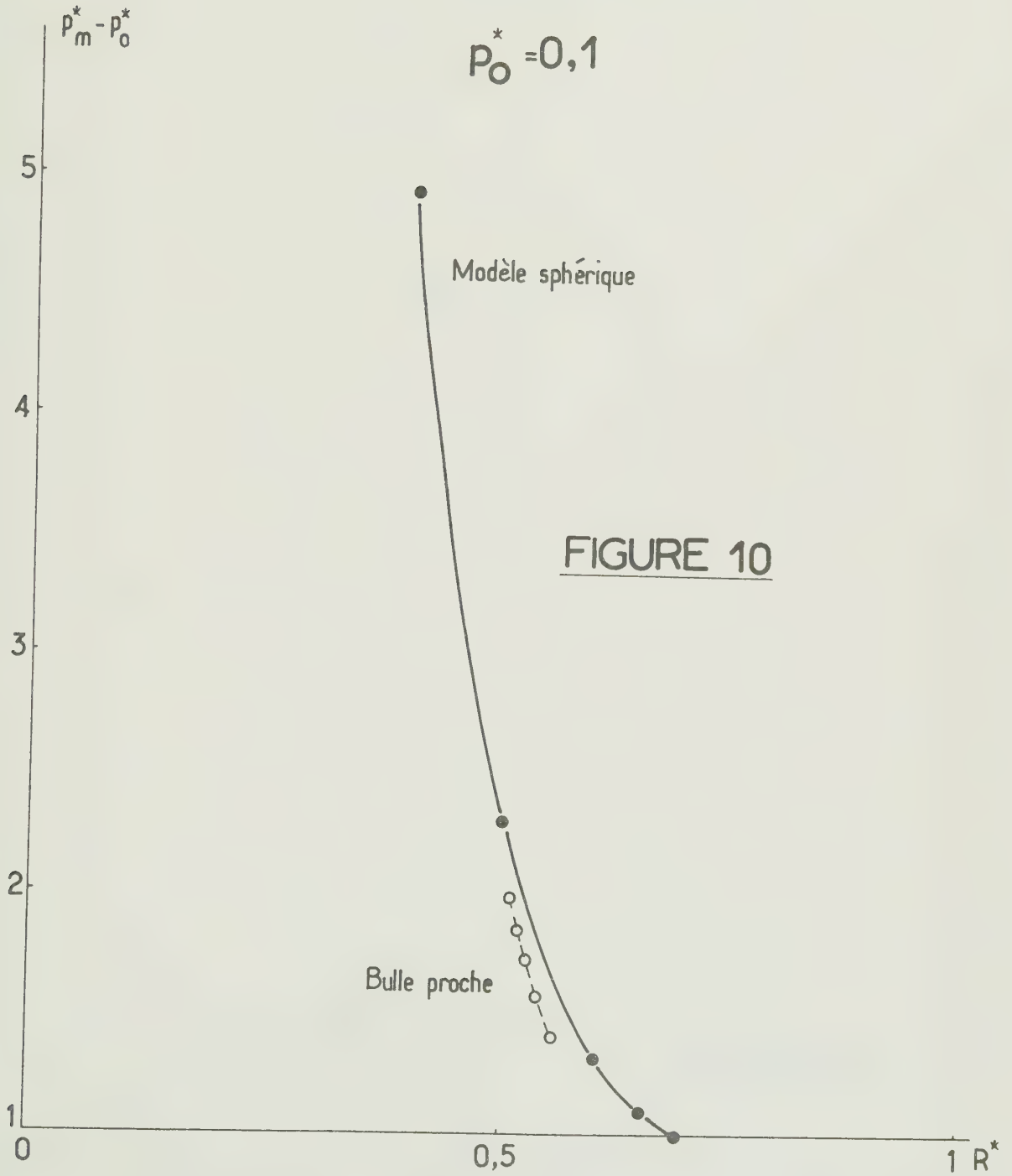



FIGURE 10

# COMPRESSION ADIABATIQUE

$P_o^* = 0{,}1$

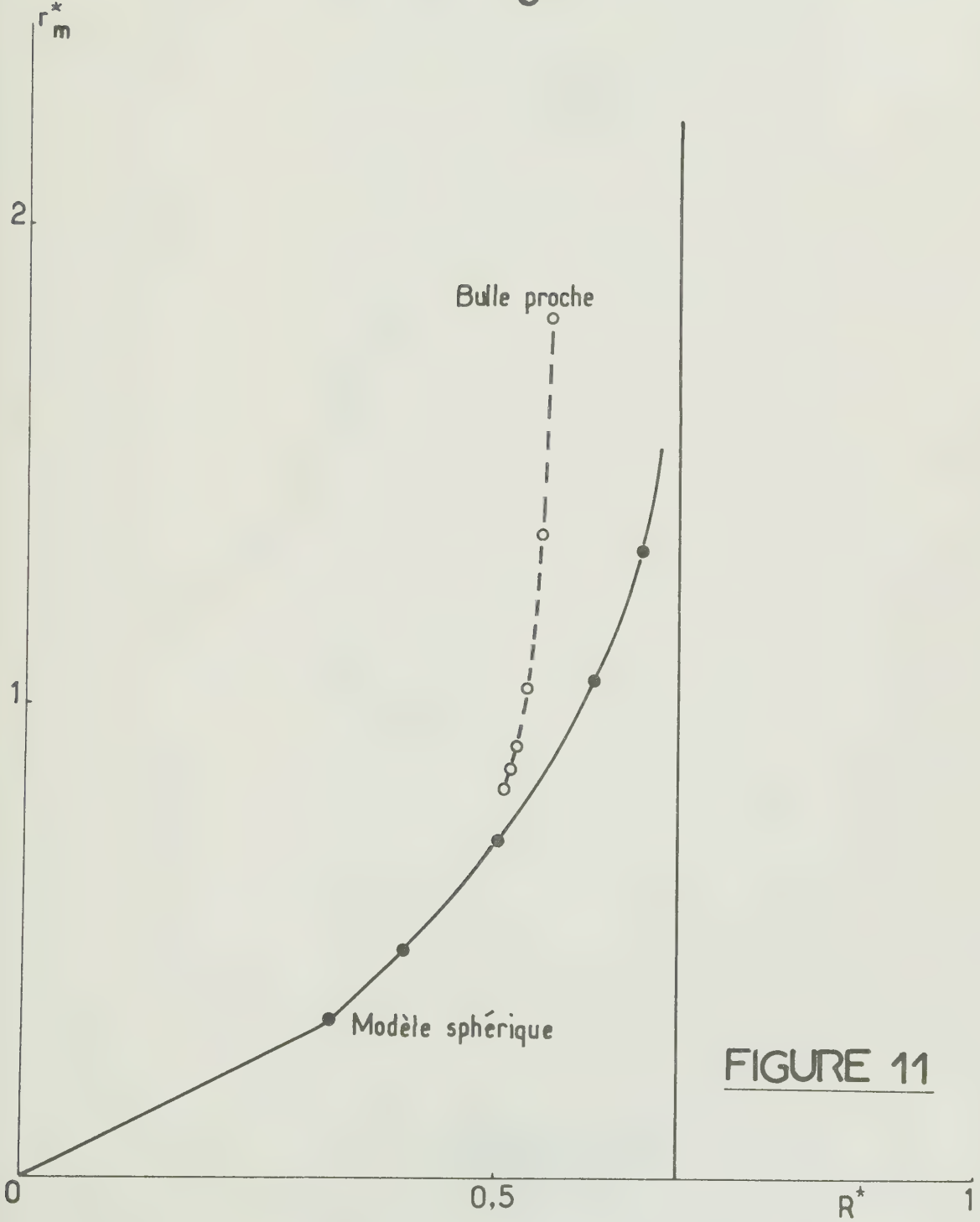



FIGURE 11

DISCRETISATION DE LA MERIDIENNE
SURFACE LIBRE - BULLE INTERMEDIAIRE

$t^* = 0,8024$

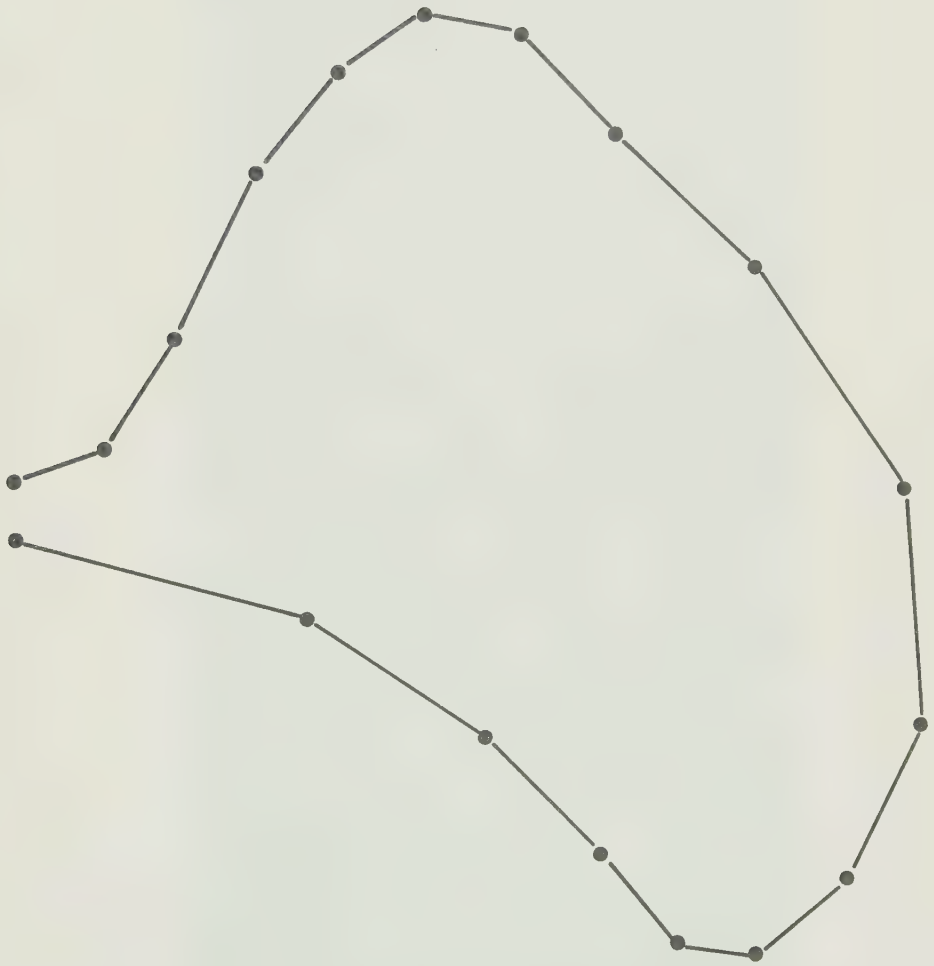
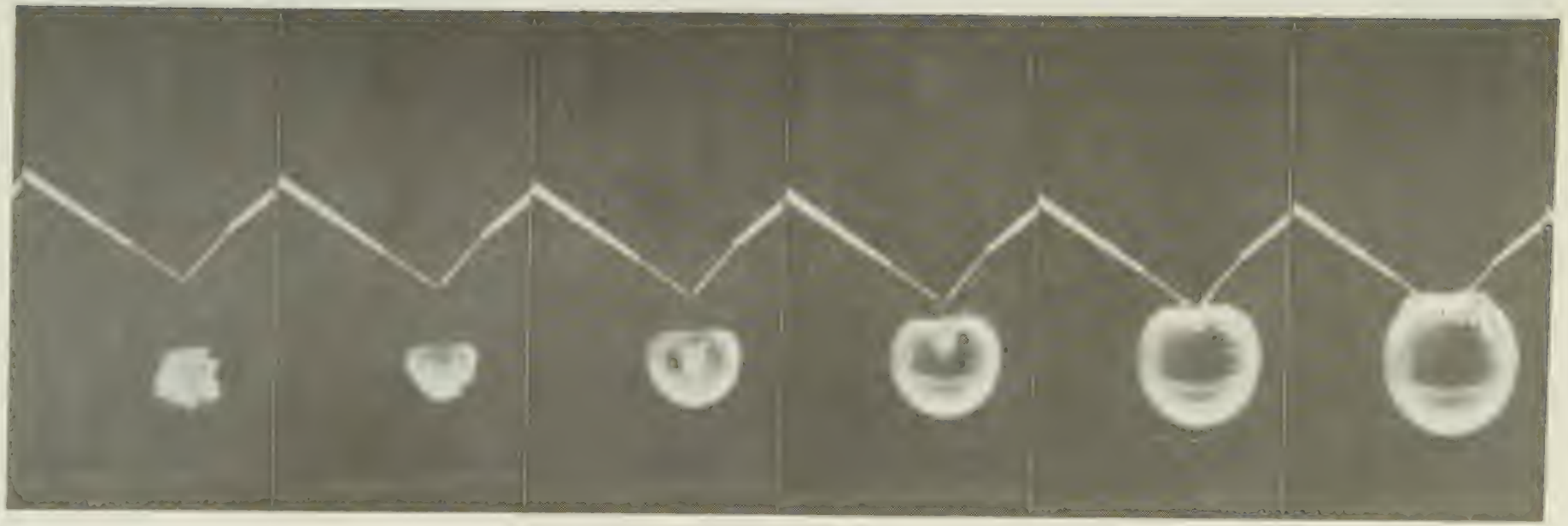
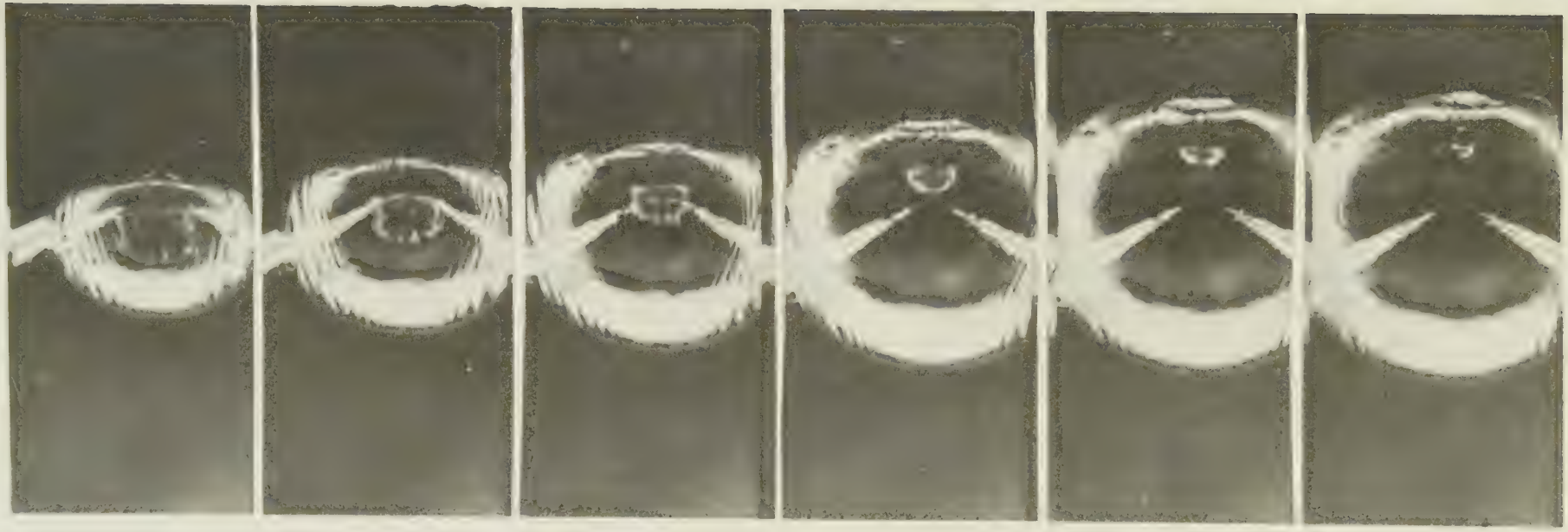


FIGURE 12





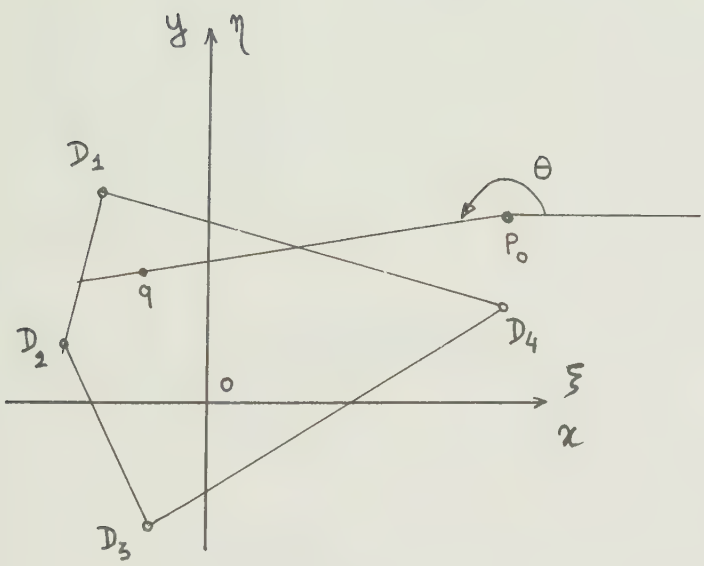
# ANNEXES

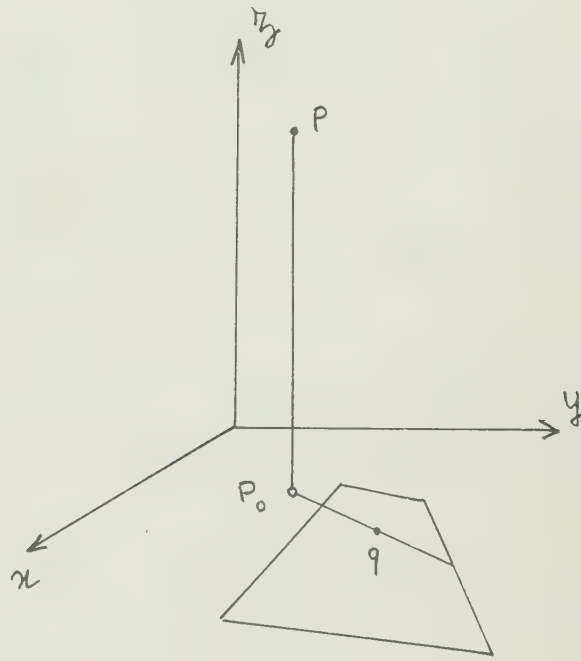
AN 1 - POTENTIEL CREE PAR UN POLYGONE PLAN

AN 2 - VITESSE INDUITE PAR UN POLYGONE PLAN

AN 3 - INTEGRATION NUMERIQUE DANS UN TRAPEZE

# AN 1 - POTENTIEL DU POLYGONE PLAN




Cf. HESS et SMITH [3].

## AN 1.1 - Préliminaires

a) On donne un polygône $(D_i)_{i \in I} = A$ $I \subset \mathbb{N}$ du plan $x0y$.

Un point $P:\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'espace, qui se projette en $P_0$ dans le plan du polygône.

Le sens des $i$ croissants autour du polygône est le sens direct.

b) On calcule

$$(1) \qquad \iint_A \frac{1}{r(q)} \, dx \, dy = \psi(P)$$

où $r(q) = \|\overrightarrow{Pq}\|$ et $q$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le plan $x0y$.

C'est le potentiel créé au point $P$ par une répartition uniforme de sources sur le polygône $A$.

c) On note

$$R = \| \overrightarrow{P_0 q} \|$$

$$\theta = (\vec{x}, \overrightarrow{P_0 q})$$

$$r = \| \overrightarrow{Pq} \|$$

$D_i$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}$.

Les dessins sont faits dans le cas du quadrilatère mais le raisonnement est général.

AN 1.2 - Changement de coordonnées

On utilisera des coordonnées cylindriques centrées en $P_0$

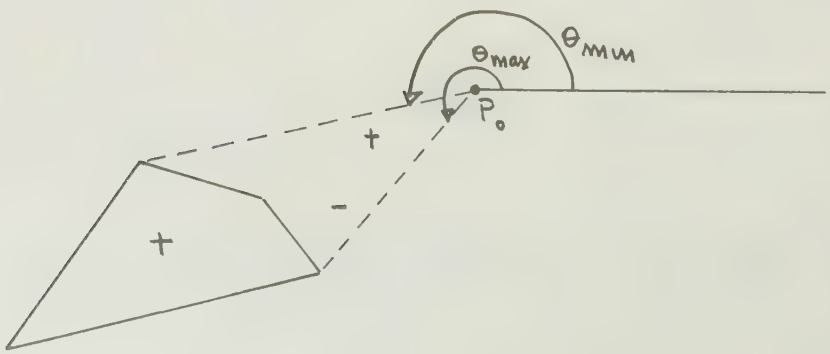
$$q : \begin{pmatrix} \theta \\ R \end{pmatrix} \quad R \geqslant 0$$

a) $r^2 = Z^2 + R^2$

$$dx\,dy = R\,dR\,d\theta$$

alors

$$\varphi(P) = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \int_{R_{min}(\theta)}^{R_{max}(\theta)} \frac{R\,dR}{\sqrt{R^2+Z^2}}\,d\theta$$



On calculera en réalité

$$\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \int_{0}^{R_{max}(\theta)} \frac{R\,dR}{\sqrt{R^2+Z^2}}\,d\theta + \int_{\theta_{max}}^{\theta_{min}} \int_{0}^{R_{min}(\theta)} \frac{R\,dR}{\sqrt{R^2+Z^2}}\,d\theta$$

mais il est facile de voir qu'on obtient le même résultat.

On note $\mathcal{C}$ le contour du polygône parcouru dans le sens direct et on écrit

$$(2) \qquad \varphi(P) = \int_{\mathcal{C}} \int_{0}^{R_M(\theta)} \frac{R\,dR}{\sqrt{R^2+Z^2}}\,d\theta$$

b) On opère un changement de variable

$$d\rho = \frac{R\,dR}{\sqrt{R^2+Z^2}} \qquad \rho_M = \sqrt{R_M^2+Z^2}$$

soit

$$\varphi(P) = \int_{\mathcal{C}} \left[ \int_{|Z|}^{\rho_M} d\rho \right] d\theta$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \rho_M(\theta)\,d\theta - |Z| \int_{\mathcal{C}} d\theta$$

On note

$$(3) \qquad \Delta\theta = \int_{\mathcal{C}} d\theta$$

$\Delta\theta = 0$ si $P_0$ extérieur au polygône

$\Delta\theta = 2\pi$ si $P_0$ intérieur au polygône

et on remarque

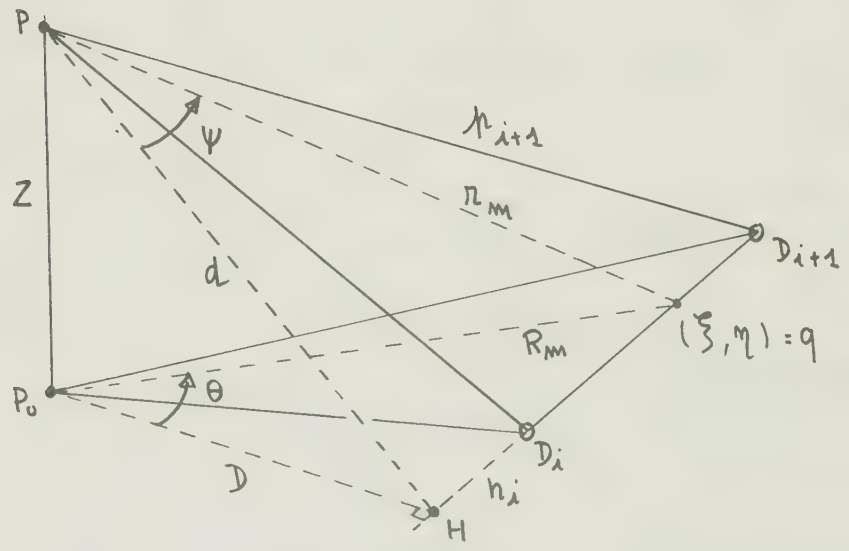
$$\varphi(P) = \int_{\mathcal{C}} \Pi_{MM}(\theta)\, d\theta \; - |Z|\,\Delta\theta$$

(4) $$\Pi_{MM} = \sqrt{R_{MM}^2 + Z^2}$$

Si $\mathcal{C}_i$ est le ième segment formant le contour $\mathcal{C}$, parcouru dans le sens direct, on aura

(4 bis) $$\varphi(P) = \sum_{i=1}^{n} \left[ \int_{\mathcal{C}_i} \Pi_{MM}(\theta)\, d\theta \right] - |Z|\,\Delta\theta$$

AN 1.3 - Intégration pour un côté du polygône




a) On opère la construction suivante : abaissement de la perpendiculaire menée de $P_0$ à $\mathcal{C}_i = (D_i, D_i + 1)$, de pied H .

On note

$$\|\overrightarrow{P_0H}\| = D$$

$$\|\overrightarrow{PH}\| = d = (D^2 + Z^2)^{1/2}$$

b) On opère un changement de variable "naturel" pour calculer

$$\varphi_i(P) = \int_{\theta_i} r_m(\theta)\, d\theta$$

une translation sur $\theta$ permet de compter $\theta$ à partir de $\overrightarrow{P_0 H}$ .

On a alors $R_m = D / \cos\theta$ et donc

$$(5) \qquad \varphi_i(P) = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sqrt{Z^2 + D^2/\cos^2\theta}\; d\theta \qquad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

On pose

$$Z^2 + D^2/\cos^2\theta = \frac{Z^2 + D^2}{\cos^2\psi}$$

Le théorème des trois perpendiculaires montre que

$$(\overrightarrow{PH} \mid \overrightarrow{D_i D_{i+1}}) = 0$$

et permet d'interpréter $\psi$ comme l'angle $(\overrightarrow{PH}, \overrightarrow{PQ})$

$$(6) \qquad -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2 \qquad \text{avec } \psi \text{ et } \theta \text{ de mêmes signes}$$

On a

$$D^2(1 + \operatorname{tg}^2\theta) + Z^2 = (D^2 + Z^2)(1 + \operatorname{tg}^2\psi)$$

$$D^2 \operatorname{tg}^2\theta = (D^2 + Z^2) \operatorname{tg}^2\psi$$

d'où, d'après la convention (6)

$$(7) \qquad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\psi \sqrt{1 + Z^2/D^2}$$

On en déduit

$$(8) \qquad \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta = \frac{d\psi}{\cos^2\psi} \sqrt{1 + \frac{Z^2}{D^2}}$$

Or nous sommes partis de

$$\frac{D^2}{\cos^2\theta} = \frac{Z^2(1-\cos^2\psi) + D^2}{\cos^2\psi}$$

l'appliquant à (8), on obtient

$$\frac{Z^2 \sin^2\psi + D^2}{D^2}\, d\theta = \sqrt{1+Z^2/D^2}\; d\psi$$

et finalement

$$(9) \qquad d\theta = \sqrt{1+\frac{Z^2}{D^2}} \quad \frac{d\psi}{Z^2\sin^2\psi/D^2 + 1}$$

On peut alors effectuer le changement de variable ainsi défini

$$\psi_i(P) = \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \frac{\sqrt{D^2+Z^2}}{\cos\psi} \sqrt{\frac{D^2+Z^2}{D^2}} \quad \frac{D^2\, d\psi}{Z^2\sin^2\psi + D^2}$$

$$(10) \qquad \psi_i(P) = D(D^2+Z^2) \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \frac{d\psi}{\cos\psi\,[Z^2\sin^2\psi + D^2]}$$

c) On opère un ultime changement de variable

$$\sin\psi = u \qquad u \in [-1,1]$$
$$d u = \cos\psi \, d\psi$$

alors

$$\varphi_i(P) = d^2 D \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{du}{(1-u^2)(Z^2 U^2 + D^2)} \tag{11}$$

Soit $I$ l'intégrand, il se décompose de la façon suivante :

$$I = \frac{1}{d^2} \frac{1}{1-U^2} + \frac{Z^2}{d^2} \frac{1}{Z^2 U^2 + D^2}$$

$$\frac{1}{d^2} \int \frac{1}{1-U^2} du = \frac{1}{d^2} \operatorname{Log} \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C_1$$

$$\frac{Z^2}{d^2} \int \frac{1}{Z^2 U^2 + D^2} du = \frac{1}{d^2} \frac{|Z|}{D} \operatorname{Arc\,tg} \left( \frac{U|Z|}{D} \right) + C_2$$

Remarquant que

$$\frac{1+u}{1-u} \geqslant 0$$

et

$$|Z| \operatorname{Arc\,tg}(k|Z|) = Z \operatorname{Arc\,tg}(kZ)$$

on aboutit à

$$\varphi_i(P) = \frac{D}{2} \left[ \operatorname{Log} \left( \frac{1+U}{1-U} \right) \right]_{U_i}^{U_{i+1}} + Z \left[ \operatorname{Arc\,tg} \frac{UZ}{D} \right]_{U_i}^{U_{i+1}} \tag{12}$$

d) Il ne reste plus à calculer que $\mu_i$ et $\mu_{i+1}$

On pose

$$\| \overrightarrow{P D_i} \| = \rho_i$$

(13)

$$\| \overrightarrow{H D_i} \| \operatorname{sgn}(\theta_i) = h_i$$

alors

$$\rho_i \mu_i = h_i$$

(14)

$$\rho_i^2 = d^2 + h_i^2$$

Pour $i = 1$ , par exemple

$$\varphi_1(P) = \underbrace{\frac{D}{2} \operatorname{Log} \frac{(1+U_2)(1-U_1)}{(1+U_1)(1-U_2)}}_{①} + \underbrace{Z\left[\operatorname{Arctg} \frac{U_2 Z}{D} - \operatorname{Arctg} \frac{U_1 Z}{D}\right]}_{②}$$

$$① = \frac{D}{2} \operatorname{Log} \frac{(\rho_2 + h_2)(\rho_1 - h_1)}{(\rho_1 + h_1)(\rho_2 - h_2)}$$

Or

$$\frac{\rho_1 - h_1}{\rho_2 - h_2} = \frac{\rho_2 + h_2}{\rho_1 + h_1} \qquad \left( d^2 = \rho_i^2 - h_i^2 \right)$$

donc

$$\frac{\rho_1 - h_1}{\rho_2 - h_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2 + h_2 - h_1}{\rho_1 + \rho_2 + h_1 - h_2}$$

et

$$① = D \operatorname{Log} \frac{\rho_1 + \rho_2 + h_2 - h_1}{\rho_1 + \rho_2 + h_1 - h_2}$$

② On pose

$$a_i = \text{Arc tg}\ \frac{U_i Z}{\mathcal{D}} \qquad a_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\alpha_i = \frac{U_i Z}{\mathcal{D}}$$

$$\vartheta = a_2 - a_1 \qquad |\vartheta| \leq \pi$$

alors

$$\text{tg}\,\vartheta = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 + \alpha_2 \alpha_1}$$

et

$$\vartheta = \text{Arc tg}\ \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 + \alpha_2 \alpha_1} + k\pi \qquad k = 0, 1, \text{ou } -1$$

Déterminons $k$.

Sachant que $a_1$ et $a_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ $\quad (\Rightarrow |k| \leq 1)$

$$\{k = 1\} \Leftrightarrow \{a_2 - a_1 > \pi/2\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ a_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{tg}\, a_2 > \text{tg}(a_1 + \pi/2) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 < 0 \\ \alpha_2 > 0 \\ \alpha_2 > \frac{-1}{\alpha_1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 < 0 \\ \\ \alpha_1 \alpha_2 + 1 < 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1\ \alpha_2 + 1 < 0 \\ \\ \alpha_2 - \alpha_1 > 0 \end{array} \right.$$

finalement

$$\{k=1\} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1\alpha_2+1<0 \\ \alpha_2-\alpha_1>0 \end{cases}$$

permutant les rôles de $a_1$ et $a_2$

(15) $$\{k=-1\} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1\alpha_2+1<0 \\ \alpha_2-\alpha_1<0 \end{cases}$$

et passant au complémentaire

$$\{k=0\} \Leftrightarrow \{\alpha_1\alpha_2+1>0\}$$

e) Résultats

$$\varphi_1(P) = D\,\mathrm{Log}\,\frac{\rho_1+\rho_2+h_2-h_1}{\rho_1+\rho_2+h_1-h_2} + Z\left[\mathrm{Arc\,tg}\,E + R\pi\right]$$

(16)

$$E = \frac{\rho_1 h_2 - \rho_2 h_1}{D^2\rho_1\rho_2 + Z^2 h_1 h_2}\,DZ$$

et $R$ est calculé à l'aide de (15)

# AN 2 - VITESSE INDUITE PAR UN POLYGONE PLAN

Cf. HESS et SMITH [3]

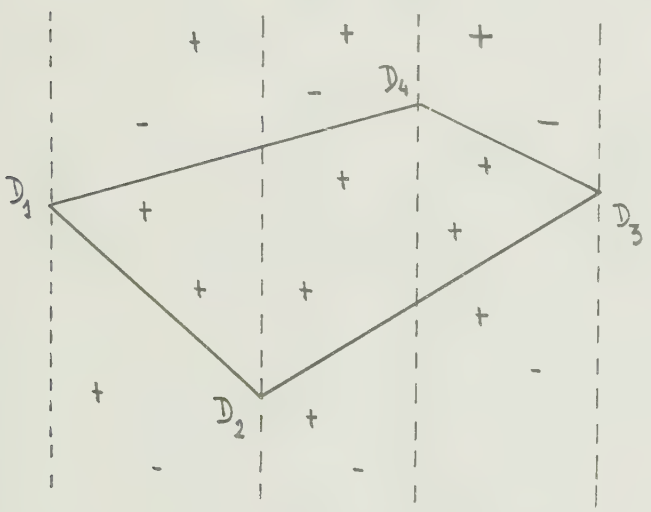
## AN 2.1 - Position du problème

a) Le potentiel du polygône a été précédemment calculé, la dérivation conduit à un calcul passablement inextricable.

On calculera donc

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial *} = \iint_A \frac{\partial}{\partial *}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

b) Deux cas vont se présenter




(i) $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$

où on utilisera la technique suivante de "découpage en bandes verticales".

On sait que

$$\varphi = \iint_A \frac{1}{r(q)}\, dx\, dy$$

On remarque que $\varphi$ peut s'écrire

$$\varphi(P) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \left[ -\int_{-\infty}^{\alpha_i(\xi)} \frac{1}{r}\, d\eta + \int_{\alpha_i(\xi)}^{+\infty} \frac{1}{r}\, d\eta \right] d\xi \right\}$$

où

$$D_i \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}$$

$\alpha_i(\xi)$ est l'ordonnée du point de $D_i D_{i+1}$ d'abscisse $\xi$.

On écrira alors

$$(2) \qquad \psi'_i = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \left[ - \int_{-\infty}^{\alpha_i(\xi)} \frac{1}{2} \, d\eta + \int_{\alpha_i(\xi)}^{+\infty} \frac{1}{2} \, d\eta \right] d\xi$$

et

$$(3) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi'_i}{\partial y}$$

Le cas de $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ est similaire avec un découpage en bandes horizontales.

(ii) $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ sera calculé en utilisant les coordonnées cylindriques du chapitre précédent

$$(4) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} - \Delta\theta \, \frac{\partial |z|}{\partial z}$$

On posera

$$V_z = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

AN 2.2 - Calcul de $V_{rz}$

a) Reprenant les notations du chapitre précédent

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial Z} - \Delta\theta \, \mathrm{sgn}(Z) \tag{5}$$

où

$$\varphi_i = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sqrt{Z^2 + D^2/\cos^2\theta} \, d\theta$$

b) Par exemple,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{Z}{\sqrt{Z^2 + D^2/\cos^2\theta}} \, d\theta$$

$$= \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{Z \cos\psi}{\sqrt{D^2+Z^2}} \sqrt{\frac{D^2+Z^2}{D^2}} \, \frac{D^2 \, d\psi}{Z^2 \sin^2\psi + D^2}$$

$$= \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{Z D \cos\psi}{Z^2 \sin^2\psi + D^2} \, d\psi$$

c) Si on pose $u = \sin\psi$ , $du = \cos\psi \, d\psi$ , alors on obtient

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} = \int_{U_1}^{U_2} \frac{Z D \, du}{Z^2 U^2 + D^2}$$

$$= \frac{|Z|}{D} \frac{D}{Z} \left[ \mathrm{Arctg} \frac{U|Z|}{D} \right]_{U_1}^{U_2} = \left[ \mathrm{Arctg} \frac{UZ}{D} \right]_{U_1}^{U_2}$$

$$(6)\qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} = \operatorname{Arc\,tg}\, DZ\, \frac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{D^2 r_1 r_2 + Z^2 h_1 h_2} + k\pi$$

$k$ est défini par (AN 1, (15))

d) Avec les notations de HESS et SMITH

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} = -\left\{ \operatorname{Arc\,tg}\; Z R_{12}\, \frac{r_1 s_{12}^2 - r_2 s_{12}^1}{R_{12}^2 r_1 r_2 + Z^2 s_{12}^1 s_{12}^2} + k'\pi \right\}$$

AN 2.3 - Calcul de $V_y$

a)
$$\frac{\partial \varphi_i'}{\partial Y} = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \left[ -\int_{-\infty}^{\alpha_i(\xi)} \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{1}{r}\right) d\eta + \int_{\alpha_i(\xi)}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{1}{r}\right) d\eta \right] d\xi$$

Posons

$$u = (X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + Z^2$$

$$r = \sqrt{u}$$

$$dr = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial Y} = \frac{\eta - Y}{u^{3/2}}$$

b) Changement de variable : $du = -2(y-\eta)\,d\eta$

Alors

$$\frac{\partial \psi'_i}{\partial y} = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \left[ -\int_{+\infty}^{u(\alpha_i)} \frac{du}{2u^{3/2}} + \int_{u(\alpha_i)}^{+\infty} \frac{du}{2u^{3/2}} \right] d\xi$$

On peut réaliser une première intégration

$$\int \frac{du}{2u^{3/2}} = \frac{-1}{u^{1/2}}$$

$$\frac{\partial \psi'_i}{\partial y} = -\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \left( -\left[u^{-1/2}\right]_{+\infty}^{u(\alpha_i)} + \left[u^{-1/2}\right]_{u(\alpha_i)}^{+\infty} \right) d\xi$$

(7)
$$\frac{\partial \psi'_i}{\partial y} = 2\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{1}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\alpha_i)^2 + z^2\right]^{1/2}}\, d\xi$$

c) Intégration

$$\alpha_i(\xi) = \eta_i + (\xi - \xi_i)\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}$$

(i) On développe le radical

$$(x-\xi)^2 = x^2 - 2x\xi + \xi^2$$

$$(y-\alpha_i)^2 = y^2 - 2y\alpha_i + \alpha_i^2$$

$$\alpha_i^2 = \eta_i^2 + 2\eta_i(\xi - \xi_i)\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} + (\xi - \xi_i)^2 \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}\right)^2$$

$$y\alpha_i = y\eta_i + y(\xi - \xi_i)\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}$$

(8) $(X-\xi)^2 + (Y-\alpha_i)^2 + Z^2 = G(\xi)$

$$G(\xi) = \xi^2\left(1+\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}\right)^2\right) + \xi\left(-2X - 2\xi_i\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}\right)^2 - 2Y\,\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}\right.$$

$$\left. + 2\eta_i\,\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}\right) + X^2 + Y^2 + Z^2 + \eta_i^2 - 2\eta_i\xi_i\,\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}$$

$$+ \xi_i^2\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}\right)^2 - 2Y\eta_i + 2Y\,\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}\,\xi_i$$

Si on pose

(9) $d_i^2 = (\xi_{i+1}-\xi_i)^2 + (\eta_{i+1}-\eta_i)^2 \qquad d_i \geq 0$

alors

$$G(\xi) = \frac{d_i^2}{(\xi_{i+1}-\xi_i)^2}\,\xi^2 + 2\xi\left(-X - \xi_i\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}\right)^2 - (Y-\eta_i)\,\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}\right)$$

(10) $$+ X^2 + Y^2 + Z^2 + \eta_i^2 + \xi_i^2\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}\right)^2 + 2\xi_i(Y-\eta_i)\,\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\xi_{i+1}-\xi_i} - 2Y\eta_i$$

On notera $G = a\xi^2 + 2b\xi + c$

(ii) On sait par ailleurs que

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+1}} = \operatorname{Log}\left(\xi + \sqrt{\xi^2+1}\right) + C$$

donc

$$I = \int \frac{d\xi}{\sqrt{a\xi^2 + 2b\xi + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi + \frac{b}{a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}}}$$

posant

$$\zeta = (\xi + b/a) \times \frac{1}{\sqrt{c/a - b^2/a^2}} \qquad \text{si} \quad \Delta = \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} < 0$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{-\Delta}} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + 1}} \sqrt{-\Delta}$$

$$(11) \qquad I = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \text{Log} \left( \frac{\xi + b/a}{\sqrt{-\Delta}} + \sqrt{\frac{a\xi^2 + 2b\xi + c}{-\Delta a}} \right) + C_3 \right\}$$

On remarque que Log $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}$ peut s'agréger à $C_3$.

Remplaçant

$$(12) \qquad \frac{\partial \varphi'_i}{\partial \gamma} = 2 \frac{|\xi_{i+1} - \xi_i|}{d_i} \text{Log} \frac{\xi_{i+1} + \frac{b}{a} + \sqrt{\frac{G(\xi_{i+1})}{a}}}{\xi_i + \frac{b}{a} + \sqrt{\frac{G(\xi_i)}{a}}}$$

$\Delta$ est négatif, car $G(\xi)$ est défini positif (8).

(iii) On va détailler le logarithme

$$\frac{\xi_{i+1} + \frac{b}{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{G(\xi_{i+1})}}{\xi_i + \frac{b}{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{G(\xi_i)}} =$$

$$\frac{\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{d_i^2}\overbrace{\left[\frac{d_i^2\,\xi_{i+1}}{\xi_{i+1}-\xi_i} + b(\xi_{i+1}-\xi_i)\right]}^{L} + \frac{|\xi_{i+1}-\xi_i|}{d_i}\sqrt{G(\xi_{i+1})}}{\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{d_i^2}\underbrace{\left[\frac{d_i^2\,\xi_i}{\xi_{i+1}-\xi_i} + b(\xi_{i+1}-\xi_i)\right]}_{M} + \frac{|\xi_{i+1}-\xi_i|}{d_i}\sqrt{G(\xi_i)}}$$

$$L = (\xi_{i+1}-\xi_i)(-X) - (Y-\eta_i)(\eta_{i+1}-\eta_i) - \xi_i\frac{(\eta_{i+1}-\eta_i)^2}{\xi_{i+1}-\xi_i}$$

$$\times\left[(\xi_{i+1}-\xi_i)^2 + (\eta_{i+1}-\eta_i)^2\right]\frac{\xi_{i+1}}{\xi_{i+1}-\xi_i}$$

$$= (\eta_{i+1}-\eta_i)^2 + (\eta_{i+1}-\eta_i)(\eta_i - Y) + (\xi_{i+1}-\xi_i)(\xi_{i+1}-X)$$

$$= (\eta_{i+1}-\eta_i)(\eta_{i+1}-Y) + (\xi_{i+1}-\xi_i)(\xi_{i+1}-X)$$

$M$ sera obtenu par échange de $i$ et $i+1$ et changement de signe

$$M = (\eta_{i+1}-\eta_i)(\eta_i - Y) + (\xi_{i+1}-\xi_i)(\xi_i - X)$$

On remarque que

$$L = (\overrightarrow{D_i D_{i+1}} \mid \overrightarrow{P_0 D_{i+1}}) \qquad \alpha_i(\xi_{i+1}) = \eta_{i+1}$$

$$M = (\overrightarrow{D_i D_{i+1}} \mid \overrightarrow{P_0 D_i}) \qquad \alpha_i(\xi_i) = \eta_i$$

$$L - M = d_i^2 \qquad \sqrt{G(\xi_{i+1})} = \rho_{i+1}$$

$$L + M = (\overrightarrow{D_i D_{i+1}} \mid \overrightarrow{P_0 D_i} + \overrightarrow{P_0 D_{i+1}}) \qquad \sqrt{G(\xi_i)} = \rho_i$$

$$= \rho_{i+1}^2 - \rho_i^2$$

d) Deux cas sont maintenant à étudier

(i) $\xi_{i+1} - \xi_i > 0$

Alors

$$\frac{\partial \varphi_i'}{\partial y} = 2 \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{d_i} \operatorname{Log} \frac{\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{d_i^2} L + \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{d_i} \rho_{i+1}}{\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{d_i^2} M + \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{d_i} \rho_i}$$

$$= 2 \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{d_i} \operatorname{Log} \frac{L + \rho_{i+1} d_i}{M + \rho_i d_i}$$

Or $(\rho_{i+1} + \rho_i - d_i)(L + \rho_{i+1} d_i) = ① =$

$$\rho_{i+1}^2 d_i + \rho_i \rho_{i+1} d_i - \rho_{i+1} d_i^2 + L(\rho_i + \rho_{i+1}) - L d_i$$

et $(\rho_{i+1} + \rho_i + d_i)(M + \rho_i d_i) = ② =$

$$\rho_i^2 d_i + \rho_i \rho_{i+1} d_i - \rho_i d_i^2 + M(\rho_i + \rho_{i+1}) + M d_i$$

$$① \cdot ② = d_i (\eta_{i+1}^2 - \eta_i^2) - d_i^2 (\eta_i + \eta_{i+1}) - (L+M) d_i + (\eta_i + \eta_{i+1})(L-M)$$

$$= d_i (L+M) + d_i^2 (\eta_i - \eta_{i+1}) - d_i^2 (\eta_i + \eta_{i+1}) - d_i (L+M)$$

$$= 0$$

On peut donc écrire

$$\frac{\partial \varphi_i'}{\partial y} = 2 \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{d_i} \operatorname{Log} \frac{\eta_{i+1} + \eta_i + d_i}{\eta_{i+1} + \eta_i - d_i} \tag{13}$$

(ii) $\xi_{i+1} - \xi_i < 0$

Alors

$$\frac{\partial \varphi_i'}{\partial y} = 2 \frac{\xi_i - \xi_{i+1}}{d_i} \operatorname{Log} \frac{L - \eta_{i+1} d_i}{M - \eta_i d_i}$$

Or $(\eta_{i+1} + \eta_i + d_i)(L - \eta_{i+1} d_i) = ① =$

$$- \eta_{i+1}^2 d_i - \eta_i \eta_{i+1} d_i - \eta_{i+1} d_i^2 + L(\eta_{i+1} + \eta_i) - M d_i$$

et $(\eta_{i+1} + \eta_i - d_i)(M - \eta_i d_i) = ② =$

$$- \eta_i^2 d_i - \eta_i \eta_{i+1} d_i + \eta_i d_i^2 + M(\eta_i + \eta_{i+1}) - M d_i$$

$$① - ② = - d_i (\eta_{i+1}^2 - \eta_i^2) - d_i^2 (\eta_{i+1} + \eta_i) + (\eta_{i+1} + \eta_i)(L-M) + d_i (L+M)$$

$$= - d_i (L+M) - (\eta_i + \eta_{i+1})(L-M) + (\eta_i + \eta_{i+1})(L-M) + d_i (L+M)$$

$$= 0$$

et $$\frac{\partial \varphi'_i}{\partial y} = 2 \frac{\xi_i - \xi_{i+1}}{d_i} \operatorname{Log} \frac{\eta_{i+1} + \eta_i - d_i}{\eta_{i+1} + \eta_i + d_i}$$

(14)

e) On peut donc garder la forme unique

(15) $$\frac{\partial \varphi'_i}{\partial y} = 2 \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{d_i} \operatorname{Log} \frac{\eta_{i+1} + \eta_i + d_i}{\eta_{i+1} + \eta_i - d_i}$$

Ainsi

$$\frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} = 2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{(h_2 - h_1) \operatorname{sgn}(\theta_2 - \theta_1)} \operatorname{sgn}(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Log} \frac{\eta_1 + \eta_2 + h_2 - h_1}{\eta_1 + \eta_2 - h_2 + h_1}$$

Soit

$$\frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} = 2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{h_2 - h_1} \operatorname{Log} \frac{\eta_1 + \eta_2 + h_2 - h_1}{\eta_1 + \eta_2 + h_1 - h_2}$$

AN 2.4 - Calcul de $V_x$

On échange les variables $x$ et $y$ et on change le signe pour retrouver un repère direct.

Soit

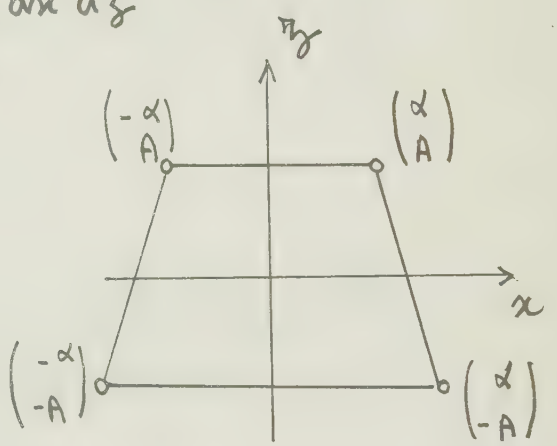
(15 bis) $$\frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} = 2 \frac{\eta_1 - \eta_2}{d_1} \operatorname{Log} \frac{\eta_1 + \eta_2 + d_1}{\eta_1 + \eta_2 - d_1}$$

## AN 3 - INTEGRATION NUMERIQUE

On veut calculer $\int_T f_j(P) = I$

$T$ est un trapèze isocèle, ses sommets ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}-\alpha\\A\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\beta\\-A\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta\\-A\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\\eta\end{pmatrix}$

$$I = \int_T f_j(P) = \int_{-A}^{A} \int_{(\beta-\alpha)/2A\,\eta - (\alpha+\beta)/2}^{(\alpha-\beta)/2A\,\eta + (\alpha+\beta)/2} f_j(x,\eta)\,dx\,d\eta$$




$$= A\int_{-1}^{1} G(\eta')\,d\eta'$$

où on a posé

$$G(\eta') = \int_{(\beta-\alpha)/2\,\eta' - (\alpha+\beta)/2}^{(\alpha-\beta)/2\,\eta' + (\alpha+\beta)/2} f_j(x, A\eta')\,dx$$

Utilisant les formules d'intégration de GAUSS à deux points, on a

$$I \simeq A\left[G\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + G\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

On opère de même pour le calcul approché de $G$

$$G(\eta') = \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\eta' + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(f_j\left(\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}\eta' - \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{3}}, A\eta'\right) + f_j\left(\frac{\alpha-\beta}{2\sqrt{3}}\eta' + \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{3}}, A\eta'\right)\right)$$

La formule finale est la suivante :

$$I \simeq A\left[\left(\frac{\alpha-\beta}{2\sqrt{3}}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(f_j(P_1)+f_j(P_2)\right)+\left(\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(f_j(P_3)+f_j(P_4)\right)\right]$$

avec

$$P_1 = \left(\frac{\beta-\alpha}{6} - \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{3}} \;,\; \frac{A}{\sqrt{3}}\right)$$

$$P_2 = \left(\frac{\alpha-\beta}{6} + \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{3}} \;,\; \frac{A}{\sqrt{3}}\right)$$

$$P_3 = \left(\frac{\alpha-\beta}{6} - \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{3}} \;,\; \frac{-A}{\sqrt{3}}\right)$$

$$P_4 = \left(\frac{\beta-\alpha}{6} + \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{3}} \;,\; \frac{-A}{\sqrt{3}}\right)$$

# BIBLIOGRAPHIE


[1] CEA J.
"Optimisation, théorie et algorithmes" pp. 112, 115
DUNOD (1971)

[2] CHAHINE G.
"Etude asymptotique et expérimentale des oscillations et du collapse des bulles"
Rapport ENSTA 042 (1974)

[3] HESS J.L. et SMITH A.M.O.
"Calculation of potential flow about arbitrary bodies"
Progress in aeronautical science, Vol. 8, PERGAMON PRESS, New York (1966)

[4] KELLOGG O.D.
"Foundations of potential theory"
F. UNGAR publishing company, New-York (1929)

[5] KNAPP R.T. et HOLLANDER
"Laboratory investigations of the mechanism of cavitation"
Transactions of the ASME 70 pp. 416, 435 (1948)

[6] LAURENT P.J.
"Approximation et optimisation" pp. 155, 178
HERMANN (1972)

[7] LAVAL P.
"Méthodes instationnaires de calcul des effets d'interaction de paroi en écoulement bidimensionnel supercritique"
La recherche aérospatiale n° 1973-5 pp. 275, 288 (1973)

[8] MITCHELL T.M. et HAMMIT F.G.
"Asymmetric cavitation bubble collapse"
Journal of fluid engineering pp. 29, 37 (Mars 1973)